جمهورية العراق
وزارة التربية
المديرية العامة للمناهج

الرياضيات

للصف الخامس العلمي

المؤلفون

د.عبد علي حمودي الطائي

د. طارق شعبان رجب | د.رحيم يونس كرو
محمد عبد الغفور الجواهري | منعم حسين التميمي
يوسف شريف المعمار | جعفر رضا هاشم الزبيدي

الطبعة الثانية عشر
١٤٤٥هـ / ٢٠٢٣ م

المشرف العلمي على الطبع : زينة عبد الامير حسين

المشرف الفني على الطبع : ماهر داود السوداني

الموقع والصفحة الرسمية للمديرية العامة للمناهج

www.manahj.edu.iq
manahjb@yahoo.com
Info@manahj.edu.iq



manahjb
manahj

استناداً الى القانون يوزع مجاناً ويمنع بيعه وتداوله في الاسواق



بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة :

هذا الكتاب مخصص لطلبة الصف الخامس العلمي ضمن سلسلة كتب الرياضيات لطلبة الدراسة الأعدادية (الفرع التطبيقي) . حاولنا أن نضع بين أيدي أبنائنا الطلبة كتاباً يستطيعون من خلال دراسته متابعة المفاهيم والمصطلحات الواردة فيه .وادراك هذه المفاهيم ومن ثم أكتساب المهارات المترتبة عليها.

ويتكون من تسعة فصول

الفصل الاول اللوغاريتمات وكيفية استخدام الالة الحاسبة ، احتوى الفصل الثاني على المتتابعات اما الفصل الثالث فقد احتوى على القطوع المخروطية مقتصراً على موضوع الدائرة.

وقد أحتوى الفصل الرابع على الدوال الدائرية ورسم منحنيات الدوال الدائرية البسيطه اما الفصل الخامس يتضمن غاية الدالة واستمراريتها. اما الفصل السادسفقد احتوى على المشتقة والقواعد الاساسية للمشتقة ومشتقات الدوال الدائرية وتضمن الفصل أيضاً على تطبيقات هندسية وفيزياوية ويتضمن الفصل السابع تكملة موضوع الهندسة الفراغية واحتوى الفصل الثامن على مبدأ العد والتباديل والتوافيق والاحتمال ونسبة الاحتمال . وينتهي الكتاب بالفصل التاسع المصفوفات وكيفية حل جملة معادلات خطية في متغيرين أو أكثر .

لذا نرجو من الله العلي القدير أن يوفق أبناءنا الطلبة الى ما فيه الخير لهم ولبلدنا العزيز ونأمل من زملائنا المدرسيين موافاتنا بملاحظاتهم بهدف التطوير

ومنه العون

المؤلفون

المحتويات

الفصل الأول

Chapter 1

اللوغاريتمات Logarithms

- [1-1] نبذة مختصرة عن اللوغاريتمات .
- [1-2] الدالة اللوغاريتمية .
- [1-3] خواص الدالة اللوغاريتمية .
- [1-4] اللوغاريتمات العشرية .
- [1-5] اللوغاريتمات الطبيعية .
- [1-6] استخدام الآلة الحاسبة .

المصطلح	الرمز أو العلاقة الرياضية
الدالة الاسية	$f(x) = a^x$
الدالة اللوغارتمية	$y = \log_a x$
اللوغاريتمات العشرية	$y = \log x$
اللوغاريتمات الطبيعية	$y = \ln x$

[1-1] نبذة مختصرة عن اللوغاريتمات

اكتشفت اللوغاريتمات في أوائل القرن السابع عشر من قبل الملّاك الاسكتلندي جون نابيير (1550 - 1617م) الذي كان شغوفاً بالرياضيات ومن اهم اعماله استخدام اللوغاريتمات التي ساعدت في تبسيط الحسابات الفلكية المعقدة التي تحتوي في اغلبها عمليتي الضرب والقسمة وتحويلها الى عمليتي الجمع والطرح وكان كتابه ((توصيف قواعد اللوغاريتم المدهشة)) الذي نشره في عام 1614 م . وقد حوى هذا الكتاب اولى الجداول اللوغاريتمية التي استغرق اعدادها 20 سنة.

الفكرة الأساس القائمة عليها اللوغاريتمات هي تحويل الاعداد على شكل أس والتعامل معها عوضا عن الاعداد الاصلية.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E	E·30	E·30^2	E·30^3	E·30^4	E·30^5	E·30^6	E·30^7	E·30^8	E·30^9

واليك بعض المجالات التي تستخدم فيها اللوغاريتمات:

* استخدامه في قياس قوة الزلزال على مقياس ريختر.
* يصف الرقم الهيدروجيني للمادة (PH) درجة حموضة المادة التي تحسب باستخدام اللوغاريتمات للأساس 10 حيث:



الرقم الهيدروجيني $PH = -\log [H^+]$

H^+ تركيز أيون الهيدروجين في المادة

*يستخدم في قياس شدة الصوت (L) بالديسيبل حيث:

$L = 10 \text{ Log } a/a_0$ حيث a: شدة الصوت (و/م^2)

a_0: اقل شدة للصوت تستطيع إذن انسان عادي ان تميزه .

*حساب سرعة الصواريخ (s) حيث:

$$s = -0.0098n + v \text{ Ln } k$$

n: زمن اشتعال وقود المحرك.

v: سرعة انطلاق البخار كم/ ثا.

k: نسبة كتلة الصاروخ محمل بالوقود الى كتلتة بدون وقود

Ln: اللوغاريتم الطبيعي.

* في الاحصاء يستخدم في حساب الفائدة المركبة المستمرة R حيث:

$$R = m\, e^{n.r}$$

m: المبلغ المستثمر.

r: الفائدة.

n: عدد السنوات .

*حساب الوسط الهندسي = $\sqrt[n]{(x_1)(x_2)(x_3)\dots(x_n)}$

في البنود اللاحقة سندرس اللوغاريتمات العشرية والطبيعية .

[1-2] الدالة اللوغاريتمية Logarithmic Function

لقد درست في الصف الرابع العلمي الدالة الأسية:

$f: R \rightarrow R^{++}$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ وهي دالة تقابل

ولانها دالة تقابل فلها دالة عكسية (f^{-1}) حيث $f^{-1}: R^{++} \rightarrow R$

وهي تقابل ايضاً وتدعى هذه بالدالة اللوغاريتمية

ولتوضح ذلك: الجدول أدناه يمثل بعض الازواج المرتبة التي تمثل الدالة $y = 2^x$

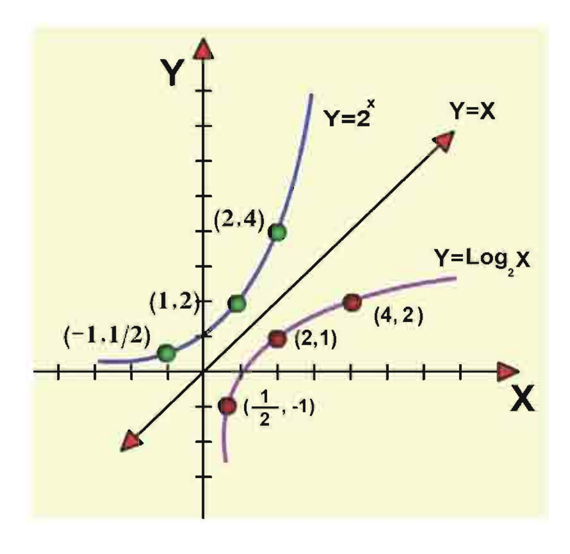
x	2	1	0	-1
2^x	4	2	1	1/2

بالإعتماد على النقاط :- $\{(-1, \frac{1}{2}), (0,1), (1,2), (2,4)\}$ رسمنا المنحني البياني $y = 2^x$

ويمكن رسم المنحني البياني للتقابل العكسي بالإعتماد على نظائر هذه النقاط والتي هي :-

$\{(\frac{1}{2}, -1), (1,0), (2,1), (4,2)\}$

والشكل المجاور يوضح ذلك.



وبصورة عامة يمكن وضع تعريف الدالة اللوغارتمية بالشكل الآتي :-

الدالة اللوغاريتمية :

يرمز للدالة العكسية للدالة $y=a^x$ بالرمز $x=\text{Log}_a y$ فنقول ان x هو لوغاريتم y للاساس a.

ويمكننا ان نكتب العلاقة الآتية:

$$x = \text{Log}_a y \Leftrightarrow y = a^x$$

$$\forall x \in R \quad , \quad y \in R^{++} \quad , a > 0 , a \neq 1$$



مثال 1

اكتب كلا مما يأتي بالصورة اللوغاريتمية:

1. $5^3 = 125$ 2. $0.001 = 10^{-3}$ 3. $2 = 32^{1/5}$

الحل: من المعلوم ان $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$

1. $5^3 = 125$ تكافيء $\log_5 125 = 3$
2. $0.001 = 10^{-3}$ تكافيء $\log_{10} 0.001 = -3$
3. $2 = 32^{1/5}$ تكافيء $\log_{32} 2 = 1/5$



مثال 2

اكتب كلا مما يأتي بالصورة الاسية:

1. $\log_7 49 = 2$ 2. $\log_{\sqrt{2}} 64 = 12$ 3. $\log_{10} 10000 = 4$

الحل : من المعلوم ان $y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$

1. $\log_7 49 = 2 \Rightarrow 49 = 7^2$
2. $\log_{\sqrt{2}} 64 = 12 \Rightarrow 64 = (\sqrt{2})^{12}$
3. $\log_{10} 10000 = 4 \Rightarrow 10000 = 10^4$

[3-1] خواص الدالة اللوغاريتمية

سندرج بعض خواص الدالة اللوغاريتمية:

1. لكل عدد حقيقي موجب لوغاريتم.
2. ليس للعدد الحقيقي السالب لوغاريتم.
3. بما ان الدالة اللوغاريتمية تقابل فان:

$$x = y \Leftrightarrow \log_a x = \log_a y \quad , \forall x , y \in R^{++}$$

4. لما كان $a > 0$ ، $a \neq 1$ لكل $x,y \in R^{++}$ سنقبل القواعد الآتية بدون برهان:

a. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

b. $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$

c. $\log_a x^n = n \log_a (x) \ , \forall n \in R$

d. $\log_a a = 1$

e. $\log_a 1 = 0$

ملاحظة:

مغالطات قواعد اللوغاريتمات:

* $\log_a (xy) \neq \log_a x \cdot \log_a y$
* $\log_a (x/y) \neq \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$, $y \neq 0$
* $\log_a x^n \neq (\log_a x)^n$

مثال 3

أثبت ان :-

$$\log_2 (17/5) - \log_2 (34/45) + 2\log_2 (2/3) = 1$$

الحل :

الطرف الايسر:

$$\log_2 17/5 - \log_2 34/45 + \log_2 (2/3)^2$$

$$\log_2 \left(\frac{17}{5} \cdot \frac{45}{34} \cdot \frac{4}{9}\right)$$ بعد الاختصار نحصل على

$$\log_2 2 = 1$$ الطرف الايمن

مثال 4

حل المعادلات الآتية:

1. $\log_3 x = 4$
2. $\log_x 64 = 6$
3. $\log_5 1/125 = x$
4. $\log_x 343 = 3$

الحل :

1. $\log_3 x = 4 \Rightarrow x = 3^4$

   $x = 81 \Rightarrow \{81\} =$ مج

2. $\log_x 64 = 6 \Rightarrow 64 = x^6 \Rightarrow 2^6 = x^6$

   $\therefore x = \pm 2$

   $\{2\} =$ مج   لماذا ؟

3. $\log_5 1/125 = x \Rightarrow 1/125 = 5^x$

   $5^{-3} = 5^x \Rightarrow x = -3$

   $\{-3\} =$ مج

4. $\log_x 343 = 3 \Rightarrow 343 = x^3 \Rightarrow 7^3 = x^3$

   $\therefore x = 7$

   $\{7\} =$ مج

مثال 5

أ. جد العدد الذي لوغاريتمه للاساس $(1/4)$ هو (2.5)

ب. جد اساس العدد (0.01) الذي لوغاريتمه (1)

جـ. جد لوغاريتم العدد $(1/8)$ للاساس (2)

الحل :

أ. نفرض العدد $= x \Leftarrow \log_{1/4} x = 2.5$

$\therefore x = (1/4)^{2.5} \Rightarrow x = 1/(2^2)^{2.5} \Rightarrow x = 1/32$

ب. نفرض الاساس $= x \Leftarrow \log_{x} 0.01 = 1$

$0.01 = x^{1} \Rightarrow x = 0.01$

جـ. نفرض اللوغاريتم $= x \Leftarrow \log_{2} 1/8 = x$

$1/8 = 2^{x} \Rightarrow 2^{x} = 2^{-3} \Rightarrow x = -3$



تمارين (1-1)



1. جد قيمة x لكل مما يأتي:

c. $\log_{10} 0.00001 = x$ b. $\log_{x} 16 = -4$ a. $\log_{10} x = 5$

2. اكتب الصورة الاخرى لكل مما يأتي:

d. $(0.01)^2 = 0.0001$ c. $\log_{5} 1/25 = -2$ b. $7^{3} = 343$ a. $\log_{10} 10000 = 4$

3. فيما يلي علاقات غير صحيحة دائماً. أعطِ $x = a$ ، $y = a$، حيث $a > 0$ وبين ذلك:

a. $\log_a(x + y) \neq \log_a x + \log_a y$

b. $\log_a x y \neq \log_a x \cdot \log_a y$

c. $\log_a x^2 \neq (\log_a x)^2$

4. جد قيمة ما يأتي :

a. $\log_{10} 40/9 + 4\log_{10} 5 + 2\log_{10} 6$

b. $2\log_{10} 8 + \log_{10} 125 - 3\log_{10} 20$

c. $\log_a(x^2 - 4) - 2\log_a(x - 2) + \log_a(x - 2)/(x + 2)$

5. اذا كان $\log_{10} 2 = 0.3010$ ، $\log_{10} 3 = 0.4771$ جد قيمة كل مما يأتي:

c. $\log_{10} 12$ b. $\log_{10} 2000$ a. $\log_{10} 0.002$

6. حل المعادلات الآتية:

a. $\text{Log}_3(2x - 1) + \text{Log}_3(x + 4) = \text{Log}_3 5$

b. $\text{Log}_2(3x + 5) - \text{Log}_2(x - 5) = 3$

c. $\text{Log}_a 6/5 + \text{Log}_a 5/66 - \text{Log}_a 132/121 + \text{Log}_a 12 = x$

d. $\text{Log}_{10}(3x - 7) + \text{Log}_{10}(3x + 1) = 1 + \text{Log}_{10} 2$

[1-4] اللوغاريتمات العشرية Decimal Logarithms

سبق ان درسنا اللوغاريتم لاي اساس $a > 0 , a \neq 1$

والآن سنتعرف على لوغاريتم اساسه $a = 10$ يسمى اللوغاريتم العشري (اللوغاريتم الاعتيادي Common Logarithm) وقد اتفق على عدم كتابة الاساس (10) حين استعماله.

فمثلاً: $\text{Log}_{10} 7$ يكتب $\text{Log } 7$ ، $\text{Log}_{10} 0.06$ يكتب $\text{Log } 0.06$

$\text{Log}_{10} x$ يكتب $\text{Log } x$

ومن المفيد هنا ان نذكر $\text{Log } 10^n = n$ فمثلاً: $\text{Log} 10^5 = 5$ ، $\text{Log } 0.01 = \text{Log } 10^{-2} = -2$

[1-5] اللوغاريتمات الطبيعية Natural Logarithm

تعرفت في بند [1-4] على اللوغاريتمات العشرية حيث كان الاساس (10) والان سنتعرف على اللوغاريتمات التي اساسها « e »

حيث $e = 2.718281828459045$ ويمكن ايجاده (حيث $\lim_{n \to \infty} (1 + 1/n)^n = e$)

وبالتقريب تكون $e = 2.71828$

وإذا فرضنا $\frac{1}{x} = n$ فإن $n \to \infty$ إذا كانت $x \to 0^+$

ويصبح القانون $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

x	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$
0.1	2.59374264
0.01	2.70481383
0.001	2.71692393
0.0001	2.71814593
0.00001	2.71826824
0.000001	2.71828047
0.0000001	2.71828169
0.00000001	2.71828181

$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \Rightarrow$

بشـــكل :

والتي تسمى باللوغاريتمات الطبيعية وتكتب بالشكل ((Ln)) لتميزها عن اللوغاريتم العشري ((Log))

من تعريف (الدالة اللوغاريتمية) لو بدلنا الاساس a بالاساس e نحصل على

$x = Ln\ y \Leftrightarrow y = e^x$

ملاحظة:

قواعد اللوغاريتمات الطبيعية نفس قواعد اللوغاريتمات العشرية



$$Ln\ e^x = x\ ,\forall\ x \in R$$

البرهان: الطرف الايسر

$Ln\ e^x = x\ Ln\ e$

$= (x)(1)$

$= x$ الطرف الايمن



قاعدة تبديل الاساس .

$a > 0\ ,\ a \neq 1$

$$Log_a x = \frac{Ln\ x}{Ln\ a}\ ,\ Log_a x = \frac{Log\ x}{Log\ a}$$

البرهان : الطرف الايسر .

نفرض $y = Log_a x \Rightarrow x = a^y \quad .... (1)$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي العلاقة 1

$Ln\ x = Ln\ a^y$

$Ln\ x = y\ Ln\ a \Rightarrow y = Ln\ x / Ln\ a =$ الطرف الايمن



ما قيمة $1 / Log_3 15 + 1 / Log_5 15$

الحل :

$1 /(Ln\ 15 / Ln\ 3) + 1 /(Ln\ 15 / Ln\ 5) = (Ln\ 3 / Ln\ 15)+(Ln\ 5 / Ln\ 15)$

$= (Ln\ 3 + Ln\ 5)/Ln\ 15 = Ln\ 15 / Ln\ 15 = 1$

[1-6] استخدام الآلة الحاسبة

بعد دراستنا للوغاريتمات العشرية والطبيعية وبعض قوانين اللوغاريتمات. الان سندرس كيفية استخدام الحاسبة (Calculator) لأيجاد لوغاريتم عدد ولوغاريتمات الاعداد المقابلة.

اولاً: ايجاد لوغاريتم العدد :



(أ) في حالة اللوغاريتمات العشرية (Log)

* نكتب العدد المعطى ثم نضغط على المفتاح Log فيظهر الناتج .





مثال 1

استخدم آلتك الحاسبة لتجد:

1. Log 7   2. Log 13   3. Log 0.08   4. Log 1.5

الحل :

1. نكتب 7 ثم نضغط Log الناتج = 0.84509804

   اي Log7 = 0.84509804

2. نكتب 13 نضغط Log الناتج = 1.113941352
3. نكتب 0.08 نضغط Log الناتج = 1.096910013 -
4. نكتب 1.5 نضغط Log الناتج = 0.176091259

(ب) في حالة اللوغاريتمات الطبيعية ((Ln))

* نكتب العدد نضغط المفتاح Ln فيظهر الناتج

مثال 2

استخدم آلتك الحاسبة لتجد:

1. Ln 7   2. Ln 13   3. Ln 0.08   4. Ln 1.5

الحل:

1. نكتب 7 نضغط Ln الناتج = 1.945910149
2. نكتب 13 نضغط Ln الناتج = 2.564949357
3. نكتب 0.08 نضغط Ln الناتج = 2.525728644 -
4. نكتب 1.5 نضغط Ln الناتج = 0.405465108

ثانياً: أيجاد العدد المقابل اذا علم لوغاريتمة

(أ) في حالة اللوغاريتمات العشرية

* نكتب لوغاريتم العدد المعطى نضغط على مفتاح 2ndF (او في بعض الحاسبات INV)

ويكون لونه عادةً ((اصفر، ازرق ...)) ثم نضغط على Log فيظهر العدد المطلوب .

مثال 3

باستخدام آلتك الحاسبة جد الاعداد المقابلة التي لوغاريتماتها العشرية هي:

1. 0.84509804 2. 1.113943352 3. - 1.096910013 4. 0.176091259

الحل:

1. نكتب 0.84509804 نضغط 2ndF ثم نضغط Log فيظهر 7
2. نكتب 1.113943352 نضغط 2ndF نضغط Log يظهر 12.9999999 $\simeq$ 13
3. نضغط مفتاح [-] نكتب 0.096910013 ثم نضغط [=]

فيظهر 0.096910013- ثم نضغط 2ndF ثم Log يظهر 0.08

4. نكتب 0.176091259 نضغط 2ndF ثم Log يظهر 1.5

ملاحظة:

قارن نتائج مثال (1) مع مثال (3)

(ب) في حالة اللوغاريتمات الطبيعية ((Ln))

* نكتب لوغاريتم العدد المعطى ثم نضغط على مفتاح 2ndF ثم نضغط Ln فيظهر العدد المطلوب

مثال 4

جد الاعداد المقابلة للاعداد التي لوغاريتمها الطبيعي هي:

1. 1.945910149 2. 2.564949357

3. -2.525728644 4. 0.405465108

الحل:

1. نكتب 1.945910149 نضغط 2ndF ثم Ln فيظهر 7
2. نكتب 2.564949357 ثم نضغط 2ndF ثم مفتاح Ln يظهر 12.999999999 $\simeq$ 13
3. نضغط [−] تكتب 2.525728644 ثم [=] فيظهر 2.525728644- ثم

نضغط 2ndF ثم Ln فيظهر 0.08

4. نكتب 0.405465108 نضغط 2ndF ثم Ln فيظهر 1.5

أمثلة متنوعة (استخدم آلتك الحاسبة)

مثال 1

جد قيمة $\log_4 3$

الحل :

باستخدام قاعدة تبديل الأساس

$$\log_4 3 = \log 3/\log 4 = 0.4771/0.6021 = 0.7924$$

مثال 2

جد قيمة $\log 7 + \ln 5$

الحل :

نجد $\log 7 = 0.8451$

$\ln 5 = 1.6094$

$\log 7 + \ln 5 \simeq 0.8451 + 1.6094$

$= 2.4545$

مثال 3

جد قيمة $\log_5 16 - \log_5 2$

الحل :

$\log_5 16 - \log_5 2 = \log_5 16/2$

بتبديل الاساس $= \log_5 8$

$= \log 8/\log 5 \simeq 0.9031/0.6999$

$\simeq 1.2903$



مثال 4

جد قيمة $x = (1.05)^{15}$ باستخدام اللوغاريتم

الحل :

$x = (1.05)^{15}$ نأخذ لوغاريتم الطرفين

$\log x = 15 \log 1.05$ باستخدام آلتك الحاسبة

$\log x = 15 \times 0.0212$

$\log x = 0.3180$

$\therefore x = 2.0797$



مثال 5

في سنة 1995 حدثت هزة أرضية في إحدى مدن العالم بدرجة 8.0 والمصنف على مقياس رختر ، وحدثت هزة اخرى في 2001 في مدينة اخرى بمقدار 6.8 قارن بين الطاقة المنطلقة من هاتين الهزتين .

الحل:

$$R = \frac{E.\ 30^{8.0}}{E.\ 30^{6.8}} = \frac{30^{8.0}}{30^{6.8}}$$

$$R = 30^{8.0-6.8}$$

$$R = 30^{1.2}$$

$$\text{Log } R = 1.2 \text{ Log } 30$$

وبإستخدام الحاسبة اليدوية نجد

$$R = 59.2$$



مثال 6

جد الوسط الهندسي للاعداد: 16 ، 15 ، 14 ، 13

الحل :

$$\text{الوسط الهندسي} = \sqrt[n]{(x_1)(x_2)(x_3)\ \ldots\ (x_n)}$$

$$M = \sqrt[4]{(13)(14)(15)(16)}$$

$$\text{Log } M = \frac{1}{4}[\text{Log } 13 + \text{Log } 14 + \text{Log} 15 + \text{Log } 16]$$

$$\text{Log } M = \frac{1}{4}[1.1139 + 1.1462 + 1.1761 + 1.2041]$$

$$= \frac{1}{4} \times 4.6403$$

$$= 1.1601$$

$$\therefore\ M = 14.458$$

مثال 7

اوجد الرقم الهيدروجيني لماء البحر اذا كان تركيز أيون الهيدرجين $[H^+]$ له حوالي:

3.2×10^{-9}

الحل :

$$PH = -\text{Log } [H^+] \quad \text{الرقم الهيدروجيني}$$

$$= -\text{Log } 3.2 \times 10^{-9}$$

$$=-[\text{Log } 3.2 + \text{Log } 10^{-9}]$$

$$= -[\text{Log } 3.2 - 9\text{Log } 10]$$

$$= - [\text{Log}3.2 - 9]$$

$$= - \text{Log } 3.2 + 9$$

$$=-0.5052 + 9$$

$$= 8.494$$

مثال 8

بفرض انك تستثمر (2) مليون دينار بفائدة مركبة سنوية مستمرة قدرها 2٪ اوجد جملة ما ستحصل عليه بعد (10) سنوات.

الحل:

قانون حساب الفائدة المركبة المستمرة هو $R = m\, e^{n.r}$

حيث m = المبلغ ، r= الفائدة ، n = عدد السنوات

$$R= 2.000.000 \times e^{\frac{2}{100} \times 10}$$

$R= 2.000.000 \times e^{1/5}$ بأخذ Ln الطرفين

$$\text{Ln } R = \text{Ln } 2.000.000 + 1/5$$

$$= 14.7087$$

$$\therefore R = 2442908$$

مثال 9

استخدم صاروخ لدفع سفينة فضائية. فاذا كانت نسبة كتلته 20 وسرعة انطلاق البخار 1.5 كم/ثا وزمن الاشتعال 100 ثا. جد سرعة الصاروخ .

الحل:

استخدم العلاقة $s = - 0.0098\, n + v \text{ Ln } k$

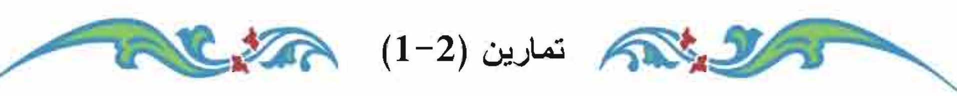
حيث: s سرعة الصاروخ ، n = الزمن ، v = سرعة انطلاق البخار k = نسبة كتلته

$$s = - 0.0098 \times 100 + 1.5 \text{ Ln}20$$

$$s = -0.98 + 1.5 \times (2.9956)$$

$$= -0.98 + 4.4934$$

$\therefore s = 3.5134$ كم/ثا



تمارين (2-1)

« استخدم آلتك الحاسبة »

1. جد قيمة كل من:

a. $\log_{10} 8$ b. $\log_3 15$ c. $\ln 200$

2. جد قيمة كل مما يأتي:

a. $\log_2 52 - \log 27$ b. $\log 33 + \log_8 33 + \ln 33$

3. جد قيمة كل مما يأتي:

a. $\sqrt[3]{(65.26)^2}$ b. $(1.02)^{10}$

4. حل كلا من المعادلات الآتية:

a. $3^x = 26$ b. $e^{3x+1} = 17$ c. $(5)(2^x) = 4^{1-x}$

5. جد الوسط الهندسي للاعداد الآتية:

10 ، 11 ، 12 ، 13 ، 14 ، 15

6. أثبت ان:

a. $1/\log_a abc + 1/\log_b abc + 1/\log_c abc = 1$

b. $\log 40/9 + 2\,(2\log 5 + \log 6) = 5$

7. اذا كان

$b = \log_a c$ ، $a = \log_c b$ فأن $\log_b a = 1/ab$

8. تركيز ايون الهيدروجين $[H^+]$ في اللبن هو 2.5×10^{-7} فجد الرقم الهيدروجيني له.

9. باستخدام قانون الفائدة المركبة $R = me^{n.r}$ لاستثمار مليون دينار بفائدة قدرها ٪2.5 ولمدة (6) سنوات. جد جملة ما سيحصل عليه.

10. جد سرعة صاروخ نسبة كتلته نحو 10، وسرعة انطلاق بخاره قدرها 3.5 كم/ثا، وزمن اشتعال المحرك 50 ثانية.

11. اي مقدار (مقادير) يكافىء المقدار $2\log a - \log b$ ؟

1. $\log (a/b)^2$ 2. $\log a^2/b$ 3. $\log (ab)^2$ 4. $\log a^2 - \log b$

12. في سنة 1997 حدثت هزة أرضية في إحدى المدن العالمية بدرجة 4.9 والمصنف على مقياس رختر ، وحدثت هزة اخرى في مدينة اخرى سنة 1999 بمقدار 7.0 ، قارن بين الطاقة المنطلقة من هاتين الهزتين.

13. أختر الاجابة الصحيحة للمقدار $\log a/b$

1. $\log a / \log b$ 2. $\log a - \log b$ 3. $\log (a-b)$ 4. ليس أي منها

الفصل الثاني

Chapter 2

المتتابعات Sequences

- [1−2] المتتابعة كدالة وتعريف .
- [2−2] الحد العام للمتتابعة .
- [3−2] المتتابعة الحسابية .
- [1−3−2] مجموع المتتابعة الحسابية .
- [4−2] المتتابعة الهندسية .
- [1−4−2] الحد العام للمتتابعة الهندسية .
- [2−4−2] المتتابعة الهندسية اللانهائية .

المصطلح		الرمز أو العلاقة الرياضية
الحد الأول		a
أساس	المتتابعة الحسابية	$d = U_{n+1} - U_n$
	المتتابعة الهندسية	$r = \frac{U_{n+1}}{U_n}$
الحد العام	المتتابعة الحسابية	$U_n = a + (n-1)\,d$
	المتتابعة الهندسية	$U_n = a\,r^{n-1}$
مجموع	المتتابعة الحسابية	$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)\,d\right]$
	المتتابعة الهندسية	$S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r}$
	المتتابعة الهندسية اللانهائية	$S_\infty = \frac{a}{1-r}$

المتتابعات Sequences

[1-2] المتتابعة كدالة وتعريف

قبل تعريف المتتابعة نأخذ المثال الآتي :

مثال

ليكن $f: \{1, 2, 3, \ldots\ldots, 10\} \to R$

$f(n) = 5 + 2n$

إن هذه الدالة تعين لكل عدد صحيح موجب (n) من بين عناصر المجموعة الجزئية من Z^+ الصورة (5+2n) وإن:

$f(1) = 5 + 2 = 7$, $f(2) = 5 + 4 = 9$, $f(3) = 5 + 6 = 11$

$f(10) = 5 + 20 = 25$

ويمكن أن نعبر عن هذه الدالة على صورة أزواج مرتبة كالآتي :

$\{(1,7) , (2,9) , (3,11) , \ldots (10,25)\}$

ولأن مجال الدالة هو المجموعة { 1,2,3,.......,10 } فانه يمكن كتابة مداها مرتباً على الصورة

{ 7,9,11 ,...25 }

أي صورة (1) = 7

صورة (2) = 9 وهكذا

وهذه الدالة تسمى [متتابعة] والاعداد المتتابعة تسمى بـــ [حدود المتتابعة]

المتتابعة هي دالة مجالها Z^+ (في هذه الحالة تسمى متتابعة غير منتهية Infinite Sequence)
أو أي مجموعة جزئية مرتبة ومنتهية تنتمي الى Z^+ تبدأ بالعدد (1) أي على الصورة
{1,2,3..., n} (في هذه الحالة تسمى متتابعة منتهية) وتكتب بشكل < ... ، ... ، ... ، ... >

فمثلاً الدالة $f = \{(1,3) , (2,7) , (5,4) , (6,10) , (7,9)\}$

لا تسمى متتابعة لأن مجالها { 1,2,5,6,7 }

وليس {1,2,3,4,5,6}

أي أن مجالها ليس مجموعة جزئية مرتبة ومتتابعة من Z^+ تبدأ بالرقم 1.

مثال 1

لتكن $n \in Z^+$ حيث $f(n) = 1/n$ أكتب المتتابعة .

الحل :

$f(1) = 1 \ , \ f(2) = 1/2 \ , \ f(3) = 1/3 \ , \ \ldots$

وتكتب بالشكل الآتي : المتتابعة $< 1 \ , \ 1/2 \ , \ 1/3 \ , \ \ldots >$

مثال 2

لتكن $f(n) = n^2 + 1 \quad , n \in \{1,2,3,\ldots,20\}$ أكتب المتتابعة .

الحل :

$f(1) = 2 \ , \ f(2) = 5 \ , \ f(3) = 10 \ , \ \ldots, \ f(20) = 401$

$\therefore$ المتتابعة $< 2 \ , \ 5 \ , \ 10 \ , \ \ldots, \ 401 >$



لتكن $f(n) = n \ , \ n \in R$ ، هل تمثل متتابعة ؟

الحل:

ليست متتابعة لأن مجالها ليس Z^+ أو مجموعة مرتبة منها على صورة $\{1,2,3,\ldots,n\}$

ملاحظة:

> إذا لم يحدد مجال المتتابعة نعتبره Z^+



اكتب الحدود الستة الأولى للمتتابعة:

$$f(n) = \begin{cases} 4 - n & \ldots\ldots\ldots\ldots \ n \text{ فردي} \\ n^2 & \ldots\ldots\ldots\ldots \ n \text{ زوجي} \end{cases}$$

الحل :

n زوجي (even)	n فردي (odd)
$f(2) = 2^2 = 4$	$f(1) = 4-1 = 3$
$f(4) = 4^2 = 16$	$f(3) = 4-3 = 1$
$f(6) = 6^2 = 36$	$f(5) = 4-5 = -1$

وتكون الحدود الستة الاولى على الترتيب هي : $< 3 \ , \ 4 \ , \ 1 \ , \ 16 \ , \ -1 \ , \ 36 >$

[2-2] الحد العام للمتتابعة: General Term For Sequence

الحد العام أو (الحد النوني) هو قاعدة عامة يمكن منها أيجاد كل حدود المتتابعة.

فمثلاً متتابعة الاعداد الزوجية الموجبة: ... 2,4,6,8 حدها العام هو:

$$f(n) = 2n \quad , \quad n \in Z^+$$

نرمز للحد العام بالرمز U_n فيكون: $U_n = f(n)$

بمعنى: $U_1 = f(1) \quad , \quad U_2 = f(2)$

وهكذا، وسنستخدم الرمز U_n لتعني المتتابعة التي حدها العام U_n وتكتب

$$U_1 , U_2 , \ldots\ldots, U_n , \ldots$$

وكذلك متتابعة الاعداد الفردية الموجبة: ... 1,3,5,7 حدها العام هو:

$$U_n = 2n - 1 , n \in Z^+$$

مثال 1

اكتب خمسة حدود الأولى من المتتابعة التي حدها العام هو $\dfrac{(-1)^n}{n}$

الحل :

$U_1=(-1)^1/1=-1 \; , \; U_2=(-1)^2/2=1/2 \; , \; U_3=(-1)^3/3=-1/3$

$U_4 = (-1)^4/4 = 1/4 \; , \; U_5 = (-1)^5/5 = -1/5$

$\therefore$ المتتابعة $<-1 \; , \; 1/2 \; , \; -1/3 \; , \; 1/4 \; , \; -1/5>$

مثال 2

اكتب الحدود الستة الاولى للمتتابعة التي حدها العام

$$U_n = \begin{cases} 2 & \ldots\ldots\ n \text{ فردي} \\ -n/4 & \ldots\ldots\ n \text{ زوجي} \end{cases}$$

الحل :

$U_1 = 2, U_2 = -1/2, U_3 = 2, U_4 = -1, U_5 = 2, U_6 = -3/2$

$\therefore$ المتتابعة $<2 \; , \; -1/2 \; , \; 2 \; , \; -1 \; , \; 2 \; , \; -3/2>$

مثال 3

اكتب المتتابعة U_n حيث:

$$U_n = \begin{cases} 1/n^2 \ \ldots\ldots\ldots \text{ فردي } n \leq 5 \\ n+1 \ \ldots\ldots\ldots \text{ زوجي } n \leq 6 \end{cases}$$

الحل :

$U_1 = 1$, $U_2 = 2+1=3$, $U_3 = 1/3^2 = 1/9$, $U_4 = 4+1 = 5$

$U_5 = 1/5^2 = 1/25$, $U_6 = 6+1 = 7$

$\therefore$ المتتابعة $<1 , 3 , 1/9 , 5 , 1/25 , 7>$

مثال 4

اكتب الثلاثة حدود الأولى من المتتابعة التي حدها العام $U_n = 3$

الحل:

$U_1 = 3$, $U_2 = 3$, $U_3 = 3$

$\therefore$ المتتابعة $< 3 , 3 , 3 >$

ملاحظات:

1. المتتابعة التي حدودها متساوية تسمى [المتتابعة الثابتة]
2. ترتيب الحدود يعد خاصية مميزة للمتتابعة ولذلك فان المتتابعتين:

$<Fn> = <3 , 2 , 7 , 9 , 4>$, $<Hn> = <3 , 7 , 2 , 9 , 4>$

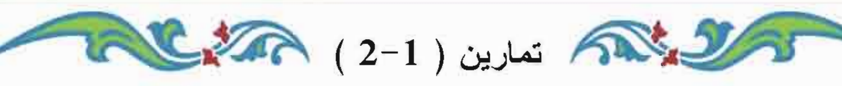
مختلفتان لأن: $H_2 = 7$ بينما $F_2 = 2$

$H_3 = 2$ بينما $F_3 = 7$

3. قد لا تكون لبعض المتتابعات قاعدة لحدها العام فمثلاً :

المتتابعة $<2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , \ldots>$

ليس لحدها العام قاعدة حيث لا يمكن إيجاد صورة عامة يمكن بواسطتها إيجاد كل حدود هذه المتتابعة .



تمارين (2-1)

1. أي العبارات التالية صحيحة وأيها خاطئة:

أ. كل دالة مجالها Z^+ هي متتابعة.

ب. كل دالة مداها Z^+ هي متتابعة.

جـ. كل دالة مجالها { 8, 7 , 6 , 5 , 4 , 3 } هي متتابعة.

د. كل دالة مجالها Z هي متتابعة.

هـ. كل دالة مجالها { 7 , 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 } متتابعة منتهية.

و. كل دالة مجالها { 9 , 8 , 7 , 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 } هي متتابعة.

ز. الحد الرابع في المتتابعة $<(n+1)/\sqrt{n}>$ يساوي $2/5$

ح. مجال المتتابعة $<2 , 4 , 6 ,\dots , 96>$ هو Z^+.

ط. في المتتابعة $<U_n>$ حيث $U_{n+1} = n\, U_n$

فأن الحدان الاول والثاني مختلفان عندما $n = 1$

ي. في المتتابعة $<n^2>$ يكون $U_{n+1} < U_n$

2. أكتب كلاً من المتتابعات الآتية مكتفياً بذكر الحدود الستة الأولى:

a. $U_n = n^2 - 2n$

b. $U_n = 2$

c. $U_n = 6/n$

d. $U_{n+1} = \dfrac{4}{1+U_n} , U_1 = 1$

e. $U_n = 1 - \dfrac{2}{n}$

f. $U_n = (-1)^n$

g. $U_n = 2^{n-1}$

h. $U_n = \begin{cases} 1 \dots & \text{فردية } n \\ 2 \dots & \text{زوجية } n \end{cases}$

3. في المتتابعة $<U_n>$ حيث $U_n = n^2 + 2n$ أثبت أن $U_{n+1} > U_n$

4. اكتب ثمانية حدود من المتتابعة بفرض:

$$\Rightarrow U : Z^+ \rightarrow R , U_n = \begin{cases} n + 2 \dots & \text{فردي } n \\ \dfrac{4}{n} \dots & \text{زوجي } n \end{cases}$$

[2-3] المتتابعة الحسابية Arithmetic Sequence

هي متتابعة يكون فيها ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرةً يساوي عدداً ثابتاً يسمى أساس المتتابعة (الفرق المشترك Common Difference) ويرمز له بالحرف $d=U_{n+1} - U_n$ وكذلك فانه يكفي لتعيين المتتابعة الحسابية معرفة حدها الاول (a) First Term وأساسها (d) ثم باضافة الاساس الى الحد الاول نحصل على الحد الثاني وهكذا...

فمثلاً المتتابعة الحسابية التي فيها $a = 2$ ، $d = 3$ هي:

$$<2 , 5 , 8 , 11 , 14 , 17 , \ldots>$$

والمتتابعة التي حدها الاول $a =$ وأساسها $d =$ هي:

$$<a , a+d , a+2d , a+3d , \ldots>$$

أنواع المتتابعات الحسابية:

أ. $<2 , 4 , 6 , 8 , \ldots>$ متتابعة متزايدة فيها $d > 0$ $(d=4-2=2)$

ب. $<7 , 3 , -1 , -5 , \ldots>$ متتابعة متناقصة فيها $d < 0$ $(d=3-7=-4)$

جـ. $<3 , 3 , 3 , \ldots>$ متتابعة ثابتة فيها $d = 0$ $(d=3-3=0)$

الحد العام للمتتابعة الحسابية: General Term forArithmetic Sequence

ذكرنا أن المتتابعة الحسابية التي حدها الأول $a =$ وأساسها $d =$ هي:

$$<a , a+d , a+2d , a+3d , \ldots>$$

$$\therefore U_1 = a = a + (0)\,d = a + (1-1)\,d$$

$$U_2 = a + (1)\,d = a + (2-1)\,d$$

$$U_3 = a+(2)d = a+(3-1)d$$

$$U_4 = a+(3)d = a+(4-1)d$$

وبصورة عامة

$$\therefore U_n = a + (n-1)\,d , \forall n > 0 , n \in N$$

يسمى بالحد العام أو (الحد النوني) للمتتابعة الحسابية.



مثال 1

اكتب المتتابعة الحسابية التي حدها الاول = 7 ، وأساسها = -3 مكتفياً بالحدود الستة الاولى منها:

$$<7 \overset{+(-3)}{\longrightarrow} 4 \overset{+(-3)}{\longrightarrow} 1 \overset{+(-3)}{\longrightarrow} -2 \overset{+(-3)}{\longrightarrow} -5 \overset{+(-3)}{\longrightarrow} -8, \ldots>$$

الحل:

المتتابعة هي: $<7, 4, 1, -2, -5, -8, \ldots>$

مثال 2

أوجد الحد العاشر من المتتابعة الحسابية: $<4, 9, 14, \ldots>$

الحل :

نستخدم قانون الحد العام:

$d = 5 \ , \ a = 4$

$\therefore U_n = a + (n-1)\, d$

$U_{10} = 4 + (10-1) \times 5 = 4 + 9 \times 5 = 49$

مثال 3

اكتب المتتابعة الحسابية التي حدها السابع = 36 وأساسها = 4

الحل:

$U_7 = a + 6\, d$

$36 = a + 6 \times 4 \Rightarrow a = 12 \Rightarrow <12 \overset{+4}{\longrightarrow} 16 \overset{+4}{\longrightarrow} 20 \overset{+4}{\longrightarrow} 24, \ldots>$

$\therefore$ المتتابعة الحسابية هي: $<12, 16, 20, 24, \ldots>$

مثال 4

متتابعة حسابية حدها الثالث = 9 وحدها السابع = -3 أوجد حدود المتتابعة بين U_7 , U_3 .

الحل:

$U_3 = a + 2\, d = 9 \qquad \ldots.(1)$

$U_7 = a + 6d = -3 \qquad \ldots.(2)$

بطرح 1 من 2 ينتج: $4d = -12 \Rightarrow d = -3$

بالتعويض في (1): $a + 2\,(-3) = 9 \Rightarrow a = 15$

$\therefore U_4 = a + 3\, d = 15 + 3\,(-3) = 6$

$U_5 = a + 4\, d = 15 + 4\,(-3) = 3$

$U_6 = a + 5\, d = 15 + 5\,(-3) = 0$

مثال 5

أوجد الحد الذي ترتيبه 200 في المتتابعة الحسابية التي حدها الخامس = (-4)

وأساسها = (12)

الحل:

وحيث أن $d = 12$ نجد a باستخدام قانون الحد العام حيث: $U_n = a + (n - 1)\, d$

$$U_5 = a + 4\,d \Rightarrow -4 = a + 4 \times 12 \Rightarrow a = -52$$

$$U_{200} = a + 199\,d$$

$$\therefore U_{200} = -52 + 199 \times 12 = 2336$$

مثال 6

أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية $<-7, -4, -1, \ldots ,113>$

الحل :

$$a = -7 \;,\; d = -4 - (-7) = 3 \;,\; U_n = 113$$

$$\therefore U_n = a + (n - 1)\, d$$

$113 = -7 + (n - 1) \times 3 \Rightarrow 120 = 3\,(n - 1) \Rightarrow n = 41$ عدد حدود المتتابعة .

الأوساط الحسابية :

اذا كان لدينا العددان a ،b وادخلنا بينهما الاعداد ...c، d ، e

كأوساط حسابية بين a،b حيث عدد الحدود = عدد الاوساط + 2

مثلاً إذا أدخلنا 6 أوساط حسابية بين 38 , 10 تتكون متتابعة حسابية عدد حدودها = $6 + 2 = 8$

كذلك $U_8 = 38 \,,\, n = 8 \,,\, a = 10 \,,\, d = ?$

$$U_8 = a + 7\,d \Rightarrow 38 = 10 + 7\,d \Rightarrow 28 = 7\,d \Rightarrow d = 4$$

$\therefore$ الاوساط $10 \,,\, [14 \,,\, 18 \,,\, 22 \,,\, 26 \,,\, 30 \,,\, 34] \,,\, 38$

[2-3-1] مجموع المتتابعة الحسابية: Sum of an Arithmetic Sequence

إذا كونت (U_n) متتابعة حسابية فان مجموع n حداً الاولى فيها يرمز له بالرمز S_n أي أن:

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ حيث U_n الحد الاخير

$S_n = a + (a+d)+(a+2d) +\dots+ (U_n - d) +U_n$

وبعكس الترتيب $\therefore S_n =U_n+(U_n-d)+(U_n-2 d) +\dots+ (a+d)+a$

بالجمع

$2S_n=(a+U_n)+(a+U_n)+(a+U_n)+\dots+(a+U_n)+(a+U_n)$

$2 S_n = n (a + U_n)$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2} [a + U_n]$$

قانون ايجاد مجموع n من حدود المتتالية الحسابية إذا علم الحد الاول والاخير.

عندما نعوض الحد العام = (الحد الاخير U_n) حيث:

$U_n = a + (n - 1) d$

$\therefore$ يصبح قانون المجموع بدلالة الحد الاول (a) والاساس (d)

$\therefore S_n = \frac{n}{2} [a + a + (n - 1) d]$

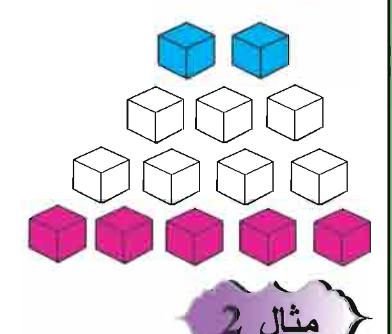
$$\therefore S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d]$$



مثال 1

أوجد مجموع 4 حدود من المتتابعة الحسابية التي حدها الاول = 2 وحدها الرابع = 5

الحل :



$a = 2 \quad , U_4 = 5 \quad , \quad n = 4 \quad , \quad S_4 = ?$

$S_n = \frac{n}{2} [a + U_n]$

$S_4 = \frac{4}{2} [2+5] = 14$

مثال 2

أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية <1 ,2 ,3 ,...,100>

الحل :

$a = 1 \ , U_n = 100 \ , n = 100$

$\therefore S_n = \frac{n}{2} [a+U_n] = \frac{100}{2} [1+100] = 50\times101= 5050$

مثال 3

متتابعة حسابية حدها الثاني = 4 وحدها ما قبل الاخير = 22 وعدد حدودها = 12 جد مجموعها.

الحل: في أية متتابعة حسابية يكون :

الحد الاول + الحد الاخير = الحد الثاني + الحد ماقبل الاخير

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}[a + U_n] = \frac{12}{2}[4 + 22] = 6 \times 26 = 156$$

مثال 4

جد مجموع ثمان حدود من المتتابعة الحسابية <-4,1,6,....>

الحل :

$$a = -4 \quad , \quad d = 5 \quad , \quad n = 8$$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d]$$

$$S_8 = \frac{8}{2}[2 \times(-4)+(8-1)\times 5]$$

$$S_8 = 4\,[-8 + 35] = 4 \times 27 = 108$$



ثلاث اعداد تكون متتابعة حسابية مجموعها = 15 ومجموع مربعاتها = 83 فما هي الاعداد؟

الحل:

نفرض الاعداد الثلاثة: $a - d \, , \, a \, , \, a + d$

$\therefore$ مجموع الاعداد: $3a = 15$

$$\therefore a = 5$$

$\therefore$ الاعداد $5-d \, , \, 5 \, , \, 5+d$

$$(5 - d)^2 + 25 + (5 + d)^2 = 83$$

$$25 - 10\,d + d^2 + 25 + 25 + 10\,d + d^2 = 83$$

$$2\,d^2 + 75 = 83 \Rightarrow 2\,d^2 = 8 \Rightarrow d^2 = 4$$

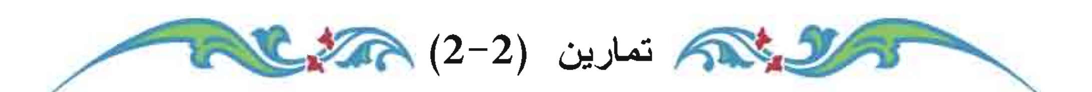
$$\therefore d = \pm 2$$

عندما $d = 2$ $\therefore$ الاعداد : 7 ، 5 ، 3 (تصاعدية لان $d>0$)

عندما $d = -2$ $\therefore$ الاعداد : 3 ، 5 ، 7 (تنازلية لان $d<0$)

خواص المتتابعة الحسابية :

1. إذا أضيفت كمية ثابتة الى كل حد من حدود المتتابعة الحسابية، أو طرحت كمية ثابتة من حدود المتتابعة الحسابية، كانت الكميات الناتجة مكونة متتابعة حسابية ايضاً أساسها أساس المتتابعة الأصلية .
2. إذا ضرب كل حد من حدود متتابعة حسابية في مقدار ثابت أو قسم على مقدار ثابت كونت الكميات الناتجة متتابعة حسابية أيضاً بأساس يختلف عن المتتابعة الأصلية.
3. حاصل جمع أو طرح متتابعتين حسابيتين يكون متتابعة حسابية أساسها هو المجموع أو الفرق بين أساسي المتتابعتين.



تمارين (2-2)

1. لكل فقرة أربع أجابات واحدة منها فقط صحيحة، إختر الاجابة الصحيحة:

أولاً: المتتابعة $<2n+1>$

أ. أساسها = 2 وحدها العاشر = 13

ب. أساسها = 1 وحدها العاشر = 21

جـ. أساسها = 2 وحدها العاشر = 21

د. أساسها = 2 وحدها العاشر = 19

ثانياً: أذا كان $<\ldots, -1, 2, x, 8>$ متتابعة حسابية فان $x = \cdots\cdot$

أ. -3 ب. 3 جـ. 5 د. 11

ثالثاً: إذا كان $<-3, x, 11>$ متتابعة حسابية فأن $x = \cdots\cdot$

أ. 7 ب. 4 جـ. 8 د. 14

رابعاً: في المتتابعة الحسابية $<3, 7, 11, \ldots, x, 63>$ $x = \cdots\cdot$

أ. 15 ب. 33 جـ. 59 د. ليس أي مما سبق

2. اكتب الحدود الخمسة الاولى لكل من المتتابعات الحسابية التي فيها:

أولاً: $a = -5 \;,\; d = 3$

ثانياً: $a = -20 \;،\; d = -4$

ثالثاً: $a = -3 \;،\; U_{n+1} = U_n + 4$

رابعاً: $U_n = (5n - 9)$

3. جد الحد السابع عشر من المتتابعة الحسابية $<-15,-12,-9,...>$

4. جد عدد حدود المتتابعة الحسابية $<-20,-17,-14, ..., 55>$ ثم جد مجموعها .

5. $<x^2+1, 2x^2+1, 2x^2+x+3, ...>$ متتابعة حسابية.

جد قيمة X؟ وما حدها السابع؟

6. إذا أدخلنا ستة أوساط حسابية بين 30 , 2 فما هذه الاوساط؟

7. جد المتتابعة الحسابية التي حدها الخامس = 8 وحدها الثامن عشر = -31

8. أي حد في المتتابعة الحسابية $<-9, -5, -1, ...>$ يكون مساوياً 87 ، هل يوجد حد في هذه المتتابعة = 333؟

9. متتابعة حسابية حدها الرابع = -1 وحاصل ضرب حديها الثاني والثالث = 10 فما حدها العاشر؟

10. إذا كانت : $<A, 7, ..., B, 25>$ متتابعة حسابية وكانت $B = 5A + 2$

فما قيمة A , B ؟ وما عدد حدودالمتتابعة؟

11. أثبت أن مجموع n حداً الاولى من الاعداد الفردية الموجبة

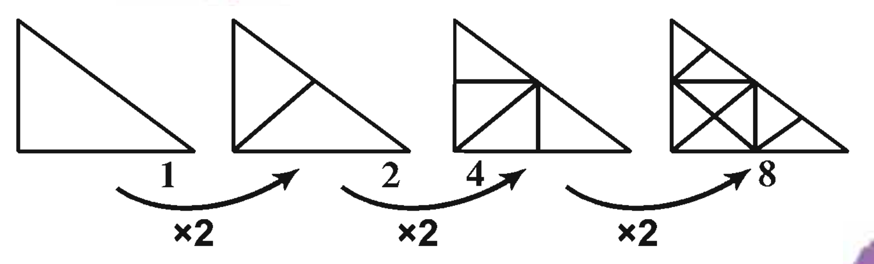
$<1, 3, 5, ..., (2n-1), ...>$ هو n^2

12. كم حداً يؤخذ من المتتابعة الحسابية $<25, 21, 17, ...>$ ابتداء من حدها الاول ليكون مجموعها = -14 ؟

13. جد مجموع الاعداد الصحيحة المحصورة بين 400 ، 100 وتقبل القسمة على 3.

[2 – 4] المتتابعة الهندسية: Geometric Sequence

وهي متتابعة ليس فيها حد يساوي الصفر، وناتج قسمة كل حد فيها على الحد السابق له مباشرةً يساوي عدداً حقيقياً ثابتاً وهذا العدد يسمى أساس المتتابعة الهندسية (النسبة المشتركة Common Ratio) ويرمز له بالرمز $r = U_{n+1}/U_n$ حيث $r \in R$



مثال

بين نوع المتتابعات:

أ. $\langle 2 , 3 , 5 , 7 , 11 , \ldots \rangle$ لا تمثل متتابعة حسابية ولا هندسية

ب. $\langle 1 , 2 , 4 , 8 , \ldots \rangle$ متتابعة هندسية لأن :

$$r = 2/1 = 4/2 = 8/4 = 2$$

جـ. $\langle 81 , -27 , 9 , -3 , \ldots \rangle$ متتابعة هندسية أساسها $= -1/3$

د. $\langle 4 , 4 , 4 , 4 , \ldots \rangle$ متتابعة ثابتة هي حسابية أساسها $= 0$ وهندسية أساسها $= 1$

هـ. $\langle 7 , 11 , 15 , 19 , \ldots \rangle$ متتابعة حسابية أساسها $= 4$

ملاحظات:

1. إذا كان (a) موجب وإن:
   - $r < 1$ (موجب) متتابعة هندسية تنازلية
   - $r = 1$ متتابعة هندسية ثابتة
   - $r > 1$ متتابعة هندسية تصاعدية
   - $r < 1$ (سالب) متتابعة هندسيةالاشارات فيها تأخذ حالة التناوب الاول موجب والثاني سالب وهكذا

2. إذا كان (a) سالب وإن:
   - $r < 1$ (موجب) هندسية تصاعدية
   - $r = 1$ هندسية ثابتة
   - $r > 1$ هندسية تنازلية
   - $r < 1$ (سالب) هندسية اشارات الحدود فيها تأخذ حالة التناوب الاول سالب والثاني موجب وهكذا



هندسية تنازلية $<4 , 2 , 1 , 1/2 ,..> \quad r=1/2 , a=4$

هندسية ثابتة $<4 , 4 , 4 , 4 ,.....> \quad r=1 , a=4$

هندسية تصاعدية $<4 , 8 , 16 , 32 ,..> \quad r=2 , a=4$

هندسية متناوبة الاشارة $<4 , -2 , 1 ,- 1/2 ,..> \quad r= -1/2 , a=4$

ثم

هندسية تصاعدية $<-4 ,- 2 , -1 , -1/2 ,..> \quad r=1/2 , a=-4$

هندسية ثابتة $<-4 , -4 , -4 , -4 ,..> \quad r=1 , a=-4$

هندسية تنازلية $<-4 ,-8 ,-16 , ..> \quad r=2 , a=-4$

هندسية متناوبة الاشارة $<-4 , 2 ,- 1 , 1/2 ,..> \quad r=-1/2 , a=-4$

[2-4-1]الحد العام للمتتابعة الهندسية General Term For Geometric Sequence

المتتابعة الهندسية التي حدها الاول = a وأساسها = r هي:

$$<a , ar , ar^2 , ar^3 , ar^4 , ...>$$

ويكون:

$$U_1 = a = ar^0 = ar^{(1-1)}$$

$$U_2 = ar^1 = ar^{(2-1)}$$

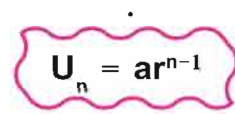
$$U_3 = ar^2 = ar^{(3-1)}$$

$$U_4 = ar^3 = ar^{(4-1)}$$

.

.

قانون الحد العام للمتابعة الهندسية





اكتب الحدود الستة الاولى من المتتابعة الهندسية التي حدها الاول = 64 وأساسها = $-1/2$

الحل:

$$<64 \overset{\times(-\frac{1}{2})}{,} -32 \overset{\times(-\frac{1}{2})}{,} 16 \overset{\times(-\frac{1}{2})}{,} ...>$$

المتتابعة الهندسية هي $<64 , -32 , 16 , -8 , 4 , -2>$



مثال 2

جد الحد السابع من متتابعة هندسية حدها الاول = $-1/4$ وأساسها = 2.

الحل:

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$\therefore U_7 = (-1/4)\,(2^{7-1}) = -\frac{1}{4} \times 2^6 = -\frac{1}{4} \times 64 = -16$$

مثال 3

متتابعة هندسية حدها الاول = 3 وحدها الخامس = 48 جد حدها الثامن.

الحل :

$$U_1 = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$U_5 = ar^4 \Rightarrow 48 = 3\,r^4$$

$$\therefore r^4 = 16 \Rightarrow r = \pm\, 2$$

عندما $r = 2$

$$U_8 = ar^7 = 3 \times (2)^7 = 3 \times 128 = 384$$

عندما $r = -2$

$$U_8 = ar^7 = 3\,(-2)^7 = 3 \times (-128) = -384$$

مثال 4

مجموع الحدود الثلاثة الاولى من متتابعة هندسية حدودها موجبة = 7 وحدها الثالث = 1 فما حدها السادس؟

الحل:

$$U_1 + U_2 + U_3 = 7$$

$$a + ar + ar^2 = 7$$

$$\therefore a\,(1 + r + r^2) = 7 \;.....(1)$$

$$U_3 = 1 \Rightarrow ar^2 = 1$$

$$\therefore a = 1/r^2 \;.....(2)$$

بتعويض 2 في 1 : $\frac{1}{r^2}\,(1 + r + r^2) = 7$

$$\therefore 1 + r + r^2 = 7\,r^2 \Rightarrow 6r^2 - r - 1 = 0$$

$$(3r+1)\,(2r-1) = 0$$

إما $r = -1/3$ يهمل لأن حدود المتتابعة موجبة.

أو $r = 1/2$ $\qquad \therefore a = 1/(1/2)^2 = 4$

$$U_6 = ar^5 = 4\,(1/2)^5 = 4 \times 1/32 = 1/8$$

الأوساط الهندسية :

إذا كان لدينا العددان a , f وأدخلنا بينهما الاعداد المرتبة b,c,d,... e بحيث

< a,b,c,d, ... e,f > تكون متتابعة هندسية فان الاعداد b,c,d, ... ,e تسمى أوساط هندسية

بين a,f ويكون عدد حدود المتتابعة الهندسية الناتجة = (عدد الاوساط + 2)

مثال

أدخل أربعة أوساط هندسية بين العددين 4 ، 128

$a = 128 \quad , \quad n = 6 \quad , \quad U_6 = 4$

$\therefore U_6=ar^5 \Rightarrow 4=128r^5 \Rightarrow r^5=1/32 =(1/2)^5$

$\therefore r =1/2$

∴ الاوساط الهندسية : 64,32,16,8

والمتتابعة الهندسية هي <128,64,32,16,8,4>

مجموع المتتابعة الهندسية Sum of a Geometric Sequence

أوضحنا في البند السابق أن المتتابعة الهندسية التي حدها الاول = a وأساسها = r هي :

< a,ar,ar²,ar³ ,....> فاذا إخترنا (n) حداً الاولى من المتتابعة فتكون الحدود المختارة هي :

$$< a,ar,ar^2,ar^3, \ldots , ar^{n-1} >$$

ومجموع هذه الحدود والذي يرمز لهُ بالرمز S_n هو :

$$S_n= a+ar+ar^2+ \ldots + ar^{n-1} \quad \ldots (1)$$

بضرب طرفي (1) في r ينتج :

$$rS_n= ar+ar^2+ar^3 \ldots + ar^n \quad \ldots (2)$$

بطرح (2) من (1) :

$$S_n - rS_n = a-ar^n$$

$$S_n(1-r) = a (1-r^n)$$

$$\therefore S_n =a(1-r^n)/(1-r) \ldots \quad r \neq 1$$

قانون المجموع .

ملاحظة :

إذا كانت r=1 فان المتتابعة الهندسية تصبح <a , a, a ,...> ويكون المجموع الى (n) من الحدود $S_n = a+a+a + \ldots$

$$\therefore S_n = na$$



مثال 1

جد مجموع الستة حدود الاولى من المتتابعة الهندسية < 64 , 32 , 16 , ... >

الحل :

$a = 64 \quad , \quad n = 6 \quad , \quad r = 1/2$

$\therefore \; S_n = a(1-r^n)/(1-r) \Rightarrow S_6 = 64[1-(1/2)^6]/(1-1/2) = 64[1-1/64]/\,1/2$

$S_6 = (64-1)\,/1/2 = 2\times 63 = 126$

[2-4-2] المتتابعة الهندسية اللانهائية : Infinite Geometric Sequence

إن التعريف الذي أعطي لمجموع حدود المتتابعة يصلح لكل المتتابعات المنتهية وغير المنتهية على حد سواء . وفي حالة المتتابعات الحسابية غير المنتهية فاننا لا نستطيع إيجاد المجموع لحدودها كافة لأن المجموع يكون إما كبير جداً أو صغير جداً فمثلاً أننا لا نستطيع أيجاد :

$$1+5+9+13+17+\ldots$$

أو $-1-2-3-4-5- \quad \ldots$

أما بالنسبة للمتتابعة الهندسية غير المنتهية (اللانهائية) فان الامر مختلف كلياً :

$$S_n = a(1-r^n)/(1-r) = a/(1-r) - ar^n/(1-r)$$

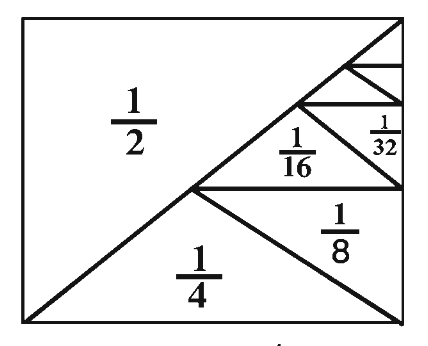
وعندما $-1 < r < 1$

فأن (r^n) تقترب من الصفر كلما زادت n زيادة كبيرة غير محددة لذلك فأن $ar^n/(1-r)$ يقترب من الصفر .

فيكون قانون مجموع المتتابعة الهندسية اللانهائية $\therefore S_\infty = a/(1-r)$

يصلح هذا القانون فقط عندما $-1 < r < 1$

ولا يصلح هذا القانون عندما $r \geq 1$ أو $r \leq -1$



مثال 2

جد $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

الحل

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1} = 1$$



جد مجموع

$$0.4 + 0.04 + 0.004 + \ldots$$

الحل :

$a = 0.4 \quad , \quad r = 0.04/0.4 = 0.1$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{0.4}{1-0.1} = \frac{0.4}{1-0.1} = \frac{4}{9}$$

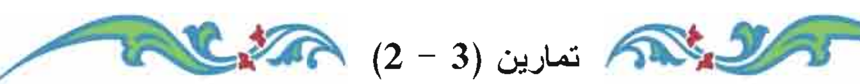
مثال 4

جد ناتج $64-16+4-1+\ldots$

الحل :

$a = 64 \quad , \quad r = -1/4$

$S_\infty = a/(1-r) = 64/(1+1/4) = 4\times64/5 = 256/5$



تمارين (3 - 2)

1. أي العبارات الآتية صحيحة وأيها خاطئة:

أ. إذا كان r أساس المتتابعة الهندسية $\langle U_n \rangle$ فان $U_5 = r^2 U_3$

ب. أساس المتتابعة الهندسية $\langle 1 , -1 , 1 , -1 , \ldots \rangle$ هو (1)

جـ. إذا كانت $\langle 32 , b , 2 , -1/2 , \ldots \rangle$ متتابعة هندسية فان $b = -8$

د. إذا كان أساس المتتابعة الهندسية موجباً فان جميع حدودها موجبة.

هـ. إذا كانت $\langle 16 , x , 4 \rangle$ متتابعة هندسية فان $x = -8$

و. إذا كانت $\langle a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , \ldots \rangle$ متتابعة هندسية فان:

$a_1/a_2 = a_3/a_4$

ز. إذا كان $U_n = 3\, U_{n+1}$ حد من حدود متتابعة هندسية فان أساسها = 3

2. اكتب الحدود الخمسة الاولى لكل من المتتابعات الهندسية الآتية التي فيها :

أ. $a = 81 \quad , \quad r = 1/3$

ب. $a = 1/32 \quad , \quad r = -2$

جـ. $a = 27 \quad , \quad r = -2/3$

د. $a = -8 \quad , \quad U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n$

هـ. $a = 2 \quad , \quad r = 2$

3. جد الحد الثامن من المتتابعة الهندسية <... , 1/2 , 1 ,2 >

4. متتابعة هندسية حدها الرابع =8- وحدها السابع = 64- فما حدها الاول وما أساسها ؟

5. أدخل 9 أعداد بين 3,96 بحيث تكون مع هذين العددين متتابعة هندسية .

6. مجموع الحدين الاول والثاني من متتابعة هندسية = 32- ومجموع حديها الرابع و الخامس = 4- فما حدها السابع ؟

7. اكتب المتتابعة الهندسية التي مجموع الحدود الستة الاولى منها 504 وأساسها = 2

8. إذا كان مجموع متتابعة هندسية أساسها =3 هو 728 وحدها الاخير هو 486 جد حدها الاول وعدد حدودها .

9. متتابعة هندسية موجبة الحدود حاصل ضرب حدودها الثلاثة الاولى 1/27 ومجموع حدودها الثاني والثالث والرابع 13/27 أوجد المتتابعة؟ ثم جد مجموعها الى مالانهاية؟

ج/ <1 , 1/3 , 1/9,1/27>

$S_\infty = 3/2$

10. ثلاثة اعداد مكونة متتابعة حسابية مجموعها (18) ولو اضيفت الاعداد 1،2،7 الى حدودها على الترتيب لتألف من الاعداد الناتجة متتابعة هندسية فما هذه الاعـــداد ؟

11. اذا كان مجموع ثلاثة اعداد تؤلف متتابعة هندسية يساوي (70) فإذا ضربنا كل من حدها الأول والثالث في (4) وحدهـــا الثاني في (5) كانت الأعداد الناتجة تؤلـــف متتابعة حسابية فما هذه الأعداد ؟



Chapter 3

القطوع المخروطية Conic Sections

- نبذة تاريخية
- مقدمة
- [1-3] الدائرة
- [2-3] معادلة الدائرة القياسية
- [1-2-3] معادلة الدائرة اذا مست احد المحورين أو كليهما
- [2-2-3] المعادلة العامة للدائرة

المصطلح		الرمز أو العلاقة الرياضية
مركز الدائرة		c (h,k)
نصف قطر الدائرة		r
معادلة الدائرة	القياسية	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
	العامة	$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

القطوع المخروطية

نبذة تاريخية:

في الألفية الثالثة قبل الميلاد كان قدماء البابليين والمصريين رواداً في الهندســة حيث طوروا صيغا لايجاد المساحات وحجوم بعض المجسمات البسيطة وأستخدموا الهندسة لقياس مساحة الارض وحساب المثلثات لقياس الزوايا والميل في البناء وكان البابليون يستعملون الهندسة في التنبؤ بمواعيد كســوف الشمس وخسوف القمر. وكان المصريون يستخدمون الهندسة في بناء المعابد وتحديد زوايا الاهرامــات وتحديد مســاحة الدائرة بالتقريــب. وفي القرن الثالث قبل الميلاد عنُي الأغريق بدراســة الاشكال للسطوح حيث ظهر في العصر اليوناني رياضيون ننوه بثلاثة منهم:

- أقليــدس (283 ق.م) الذي حظي كتابه ((الاصول)) عنــد العرب بما لم يحظ به مؤلف رياضي آخر حيث تناول في المقالة الثالثة من كتابه عن الدائرة.
- أرخميدس (أرشــميدس) (212 ق.م) كان بالنسبة للعرب رائداً في الهندسة المساحية والميكانيكية ، عرفوا قدراً عن قليل من كتبه وخاصة كتاب الدائرة وقياســها حيث في القرن الثالث قبل الميلاد عمم هذا العالم الاغريقي طريقة (الاستنفاذ) مستخدماً مضلعاً من 96 ضلعاً لتعريف الدائرة .
- أبو للونيوس (180 ق.م) أتجه هذا العالم نحو القطاعات المخروطية فحدد أشــكالها ويبين خواصها وعلاقاتها وقد عرف له العرب ذلك واحتفظوا بقدر من مؤلفاته وأهمها كتاب المخروطات يقع في ثمان مقالات .

وفي العصر الاســلامي كانت عناية العالم العربي أبن ســينا بالكتــاب فاقت بكثير عناية غيره فالجزء الهندسي من رياضيات كتاب الشفاء خير دليل على ذلك.

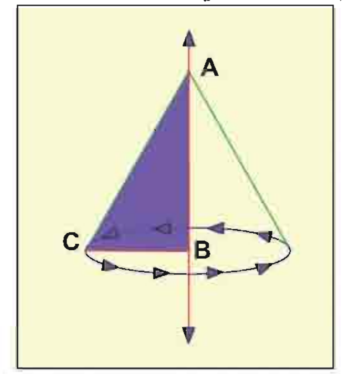
أما الدور الذي قام به العلماء العرب فهو الذي مهد الأذهان والعقول للادوار التي قام بها البشر فيما بعد ومنهم محمد بن محمد بن يحيى البوزجاني ولد ســنة 328 هــ حيث أســتطاع أن يجد حلولاً تتعلق بالقطع المكافىء الذي مهد لعلماء ورجال الفكر العربي أن يتقدموا خطوات بالهندســة التحليلية قادتهــم الى علم التفاضل والتكامل الذي يعد أروع ما توصل اليه العقل البشــري والذي ســهل عملية الأختراعات.



أبن سيناء

المقدمة:

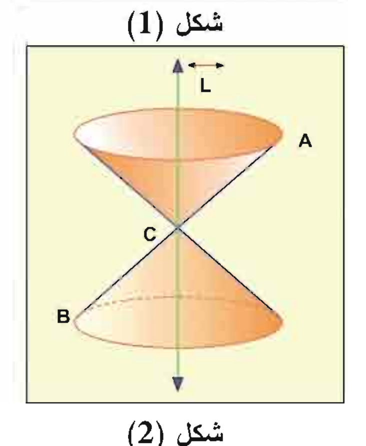
يتولد المخروط الدائري القائم من دوران المثلث A B C القائم الزاوية في B دورة كاملة حول أحد الضلعين القائمين كمحور الدوران كما في الشكل (1)



شكل (1)

الآن تأمل المخروط الدائري القائم في الشكل (2) الناتج من دوران مستقيم حول محور ثابت وبزاوية ثابتة بين المستقيم والمحور. سيتولد من هذا الدوران مخروط من مولدين يتقاطعان في الرأس (C).

ويسمى كل من $\overleftrightarrow{L}$ بمحور المخروط، $\overline{AB}$ بمولد المخروط (محور المخروط الدائري القائم يساوي قطعة المستقيم المحددة بالرأس ومركز القاعدة والمولد هو قطعة المستقيم المحددة بالرأس واحدى نقط محيط القاعدة) وللحصول على القطوع المخروطية (أشكال هندسية) هندسياً من قطع المخروط الدائري القائم بمستو ضمن شرط خاص لكل حالة (ضمن مفهوم الهندسة الأقليدية) فإذا قطع سطح المخروط الدائري القائم.



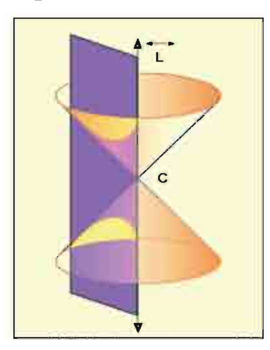
شكل (2)

اولاً: بمستو عمودي على المحور $\overleftrightarrow{L}$ ويوازي القاعدة ولا يحتوي على الرأس (C) فأن المقطع يمثل دائرة (Circle) وتكبر هذه الدائرة كلما ابتعدنا عن الرأس والعكس صحيح.كما في الشكل (3)

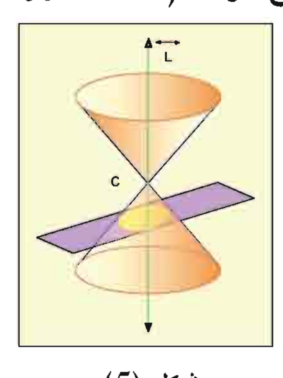
ثانياً: بمستو موازٍ لأحد مولداته فأن المقطع يمثل شكلاً هندسياً يسمى القطع المكافىء Parabola. كما في الشكل (4).

ثالثاً: بمستو غير موازٍ لقاعدته ولا يوازي أحد مولداته فأن المقطع يمثل شكلاً هندسياً يسمى بالقطع الناقص(Ellipse). كما في الشكل (5).

رابعاً: بمستو يوازي محوره $\overleftrightarrow{L}$ ويقطع مولدين من مولدات المخروط الدائري القائم فأن المقطع يمثل شكلاً هندسياً يسمى بالقطع الزائد (Hyperbola). كما في الشكل (6)

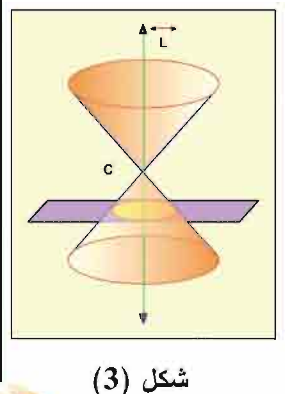


شكل (6)



شكل (5)

شكل (4)



شكل (3)

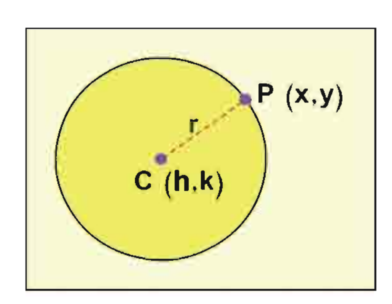
[3-1] الدائرة (Circle):

هي مجموعة النقط في المستوي التي يكون بعدها من نقطة ثابتة تسمى (المركز Center) يســـاوي مقداراً ثابتاً يســـمى (نصف القطر Radius). لذا سنرمز لمركز الدائرة بالرمز(C (h , k ، ونرمز لنصف قطر الدائرة بالرمز (r).

أي أن الدائرة بلغة المجموعات

$$\text{Circle} = \{ p: p c = r \quad , \quad r > 0\}$$

حيث (p (x,y هي نقطة (point) في المستوي (plane)



[3-2] معادلة الدائرة القياسية Characteristic Equation of Circle

دائـــرة مركزها (C (h,k ، ونصف قطرهـــا (r) من الوحدات حيث r > 0 والنقطة (p (x,y نقطة في المستوي الأحداثي فأن :

$$p c = r$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$ وبتربيع الطرفين

$$\Rightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$ الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة

حالة خاصة:

في حالة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل (0 , 0) ونصف قطرها (r) تصبح الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة هي : $x^2 + y^2 = r^2$

أمثلة:



جد معادلة الدائرة التي مركزها (3 , 5) ونصف قطرها (4) وحدات

الحل:

من الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$\therefore (x-5)^2 + (y-3)^2 = 4^2$$

$$\therefore (x-5)^2 + (y-3)^2 = 16$$



جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها (6) وحدات

الحل : $C\ (h\ ,\ k) = C\ (0\ ,0)\ ,\ r = 6$ وحدات

$\because\ (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$\therefore\ (x+0)^2 + (y-0)^2 = 36 \Rightarrow x^2 + y^2 = 36$

مثال 3

أوجد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 49$

الحل :

بالمقارنة مع المعادلة القياسية $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$c(h,k) = c(5\ ,\ -3)$

$\therefore\ r^2 = 49 \Rightarrow r = \sqrt{49} = 7$ وحدات

ملاحظة:

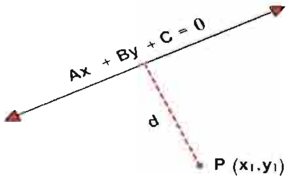
لقد تعلمت في الصف الرابع العلمي بعض القوانين منها:

اولاً: قانون البعد (المسافة) بين نقطتين $p_2(x_2\ ,y_2)\ ,\ p_1(x_1\ ,\ y_1)$ يعطى بالعلاقة

$$p_1 p_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ثانياً: قانون البعد بين المستقيم L الذي معادلته $Ax + By + C = 0$ والنقطة الخارجة عنه $p(x_1,y_1)$ يعطى حسب العلاقة

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



ثالثاً: تنصيف قطعة مستقيم $\overline{p_1 p_2}$ حيث $p_1(x_1,y_1)\ ,\ p_2\ (x_2,y_2)$ في المستوي الاحداثي المتعامد ويعطى حسب العلاقة

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}\ ,\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

P1 (x1,y1) P (x ,y) P2 (x2,y2)

نقطة التنصيف $\therefore\ p(x\ ,\ y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

أمثلة :



جد معادلة الدائرة التي مركزها $c(4\ ,\ 3)$ وتمر بالنقطة $p\ (2\ ,\ 1\ )$

الحل :

$\because\ pc = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\therefore\ pc = \sqrt{(4-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$\because\ r = pc = \sqrt{8}$

$\therefore\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 8$ المعادلة القياسية للدائرة

مثال 2

جد معادلة الدائرة التي نهايتي أحد أقطارها النقطتان $(\ 4\ ,\ 5\ )\ p_1\ ,\ (-2\ ,\ 3)\ p_2$

الحل :

$c\ (x\ ,\ y)$ منتصف $\overline{p_1 p_2}$

$\therefore\ x = (x_1 + x_2)/2 = (4 + (-2))\ /\ 2 = (\ 4-2)/2 = 1$

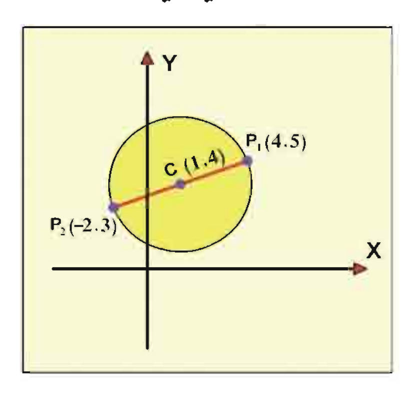
$y = (\ y_1 + y_2\ )/\ 2 = (5 + 3)\ /\ 2 = 8/2 = 4$

$\therefore\ c\ (1\ ,\ 4)$

$\therefore\ r = p_1 c = \sqrt{(4-1)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ units

$\therefore\ r = \sqrt{10}$ unit

$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 10$ المعادلة القياسية



ملاحظة: طريقة ثانية في أيجاد معادلة الدائرة عن طريق استخدام القاعدة التالية:

اذا كانت$(x_1\ ,\ y_1)\ p_1\ ,\ (x_2\ ,\ y_2)\ p_2$ هي احداثيات نهايتي قطر فيها فأن معادلة الدائرة هي:

$$x^2 + y^2 - x\ (x_1 + x_2) - y\ (y_1 + y_2) + x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

فيكون حل المثال السابق هو

$$x^2 + y^2 - x\,(4+(-2)) - y\,(5+3) + 4\,(-2) + (5)\,(3) = 0$$

$$x^2 + y^2 - x\,(2) - 8y - 8 + 15 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 7 = 0$$

لاحظ المعادلة القياسية في الحل الاول للمثال.

هي $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 10$

وبتبسيط المعادلة $\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x - 8y + 7 = 0$



جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وتمس المستقيم $3x - 4y - 15 = 0$

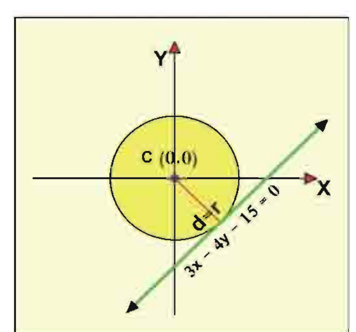
الحل :

$$d = \frac{|3x_1 - 4y_1 - 15|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|(3)(0) - (4)(0) - 15|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-15|}{5}$$

$d = 15/5 = 3$ units

$\therefore\ d = r = 3$ units

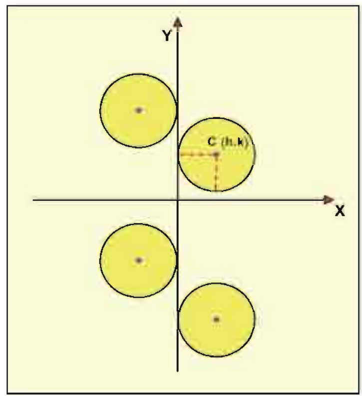
$\therefore\ x^2 + y^2 = 9$

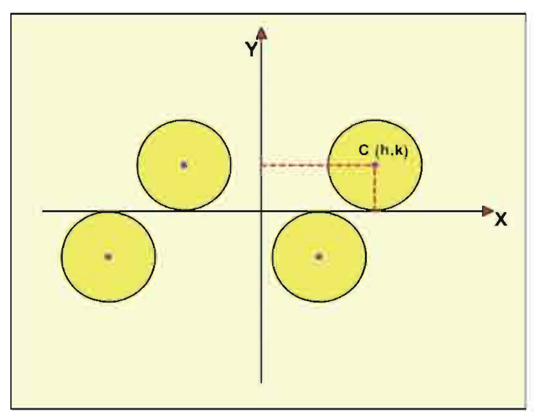


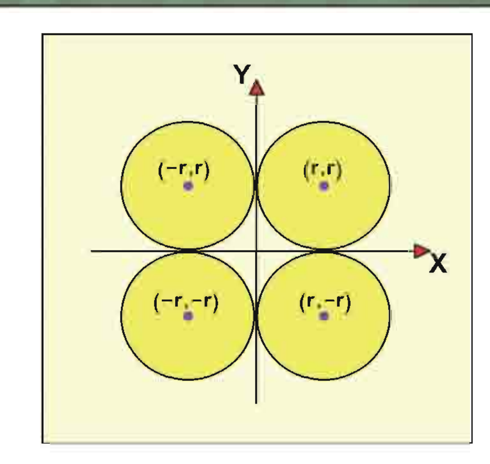
[3-2-1] معادلة الدائرة اذا مست أحد المحورين أو كليهما .

اذا مست الدائرة التي مركزها(h, k) c ونصف قطرها (r)

- محور السينات فأن $r = |k|$ ونقطة التماس هي $(h, 0)$
- محور الصادات فأن $r = |h|$ ونقطة التماس هي $(0, k)$
- المحورين الأحداثيين فأن $r = |h| = |k|$ ونقطتا التماس هما $(0, k)$ ، $(h, 0)$







فاذا الدائرة تمس المحورين وتقع في

اولاً: الربع الأول يكون مركزها (r , r)

ثانياً: الربع الثاني يكون مركزها $(-r , r)$

ثالثاً: الربع الثالث يكون مركزها $(-r , -r)$

رابعاً: الربع الرابع ويكون مركزها $(r , -r)$

أمثلة :

مثال 1

جد معادلة الدائرة التي تمس المحور السيني ومركزها $(3 , 2)$

الحل : بما أن الدائرة تمس المحور السيني

$\therefore r = |k| = |2| = 2$ unit

$\therefore (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$\therefore (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$

وبتبسيط المعادلة نحصل على

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ المعادلة العامة

ملاحظة:

ممكن ايجاد معادلة الدائرة التي تمس المحور السيني بطريقة أخرى حسب القاعدة.

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 = 0$$

حيث يكون الحل حسب هذه القاعدة للمثال الاول

$$x^2 + y^2 - 2(3x) - 2(2y) + (3)^2 = 0$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ المعادلة

مثال 2



جد معادلة الدائرة التي تمس المحور الصادي ومركزها $(4 , -1)$

الحل : بما أن الدائرة تمس المحور الصادي

$\therefore r = |h| = |4| = 4$ units

$\therefore (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$\therefore (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 16$ المعادلة القياسية

$\therefore x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$ بالتبسيط

ملاحظة:

ممكن ايجاد معادلة الدائرة التي تمس المحور الصادي بطريقة اخرى حسب القاعدة.

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + k^2 = 0$$

فيكون الحل حسب القاعدة

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + k^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2(4)x - 2(-1)y + (-1)^2 = 0$$

$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$ المعادلة

مثال 3

جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين الأحداثيين ومركزها $(4, -4)$

الحل : بما أن الدائرة تمس المحورين

$\therefore r = |h| = |k|$

$\therefore r = |4| = |-4| = 4$ units

$\therefore r = 4$ units

$\therefore (x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$ المعادلة القياسية

$\therefore x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$ المعادلة العامة

ملاحظة:

ممكن أيجاد معادلة الدائرة بطريقة اخرى بتطبيق القاعدة في الملاحظة (1) او (2) حيث نحصل على المعادلة

$$x^2 + y^2 - 2(4)x - 2(-4)y + 16 = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$$



جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين وتقع في الربع الثالث ونصف قطرها 5 وحدات

الحل :

بما أن الدائرة تمس المحورين وتقع في الربع الثالث

$\therefore C(-r, -r) = C(-5, -5)$

$\therefore (x + 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$ المعادلة القياسية

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 10x + 10y + 25 = 0$ وبالتبسيط

ملاحظة:

ممكن حل المثال بطريقة اخرى بتطبيق المعادلة حيث يكون الحل

$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + C = 0$

$C(-5, -5) = (h, k)$

$\therefore x^2 + y^2 - 2(-5)x - 2(-5)y + 25 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 10x + 10y + 25 = 0$



جد معادلة الدائرة المارة بالنقطة $p(2, 1)$. وتمس المحورين الاحداثيين.

الحل:

بما أن الدائرة تمس المحورين الأحداثيين

$\therefore r = |h| = |k|$

$\therefore (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \;\ldots\ldots\ldots(1)$

نعوض عن $k = r, h = r$ في معادلة(1)

$\Rightarrow (x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$

$p(2, 1)$ تحقق معادلة الدائرة

$\therefore (2 - r)^2 + (1 - r)^2 = r^2$

$\therefore 4 - 4r + r^2 + 1 - 2r + r^2 = r^2$

$\therefore r^2 - 6r + 5 = 0$

$(r - 5)(r - 1) = 0$

$\Rightarrow r = 5 \quad \text{or} \quad r = 1$

$\therefore r = 5 \Rightarrow C(5, 5)$

$\therefore (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$ المعادلة (1)

$\text{or} \quad r = 1 \Rightarrow C(1, 1)$

$\therefore (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ المعادلة (2)

[3-2-2] المعادلة العامة للدائرة General Equation of Circle

معادلة الدائرة بصورتها العامة ناتجة من تبسيط المعادلة القياسية

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$\Rightarrow x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 = 0$

تصبح المعادلة $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + C = 0$

واذا فرضنا $A = -2h \quad , \quad B = -2k$

$C = h^2 + k^2 - r^2$

تصبح معادلة الدائرة بالصورة $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

أي أن $h = -A/2 \quad , \quad K = -B/2 \quad , \quad r = \sqrt{h^2 + k^2 - C} > 0$

ملاحظة:

من المعادلة العامة للدائرة نلاحظ أن

* معادلة من الدرجة الثانية للمتغيرين x , y
* معامل x^2 = معامل y^2 ((الافضل ان يكون 1))
* المعادلة خالية من الحد $x\,y$
* $r > 0$ أي أن $\sqrt{(h^2 + k^2 - C)} > 0$

أمثلة :

مثال 1

اي المعادلات الآتية يمثل معادلة دائرة:

a. $x^3 + y^3 - 2x + 6y - 9 = 0$

b. $3x^2 - 3y^2 - 2x + 6y - 19 = 0$

c. $x^2 + y^2 - 5xy - 2x + 6y - 19 = 0$

d. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 19 = 0$

e. $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 19 = 0$

الحل :

a. لا تمثل معادلة دائرة لأنها معادلة من الدرجة الثالثة

b. لا تمثل معادلة الدائرة لان معامل $x^2 \neq$ معامل y^2

c. لا تمثل معادلة الدائرة لانها تحتوي على الحد $x\,y$.

d. لا تمثل معادلة الدائرة حيث

$h = -(-2)/2 = 1 \quad , \quad k = -6/2 = -3 \quad , \quad C = 19$

$\therefore r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} = \sqrt{1 + 9 - 19} = \sqrt{-9} \notin R$

$\therefore$ لا تمثل معادلة الدائرة

e. تمثل معادلة دائرة حيث:

$h = 1 \quad , \quad k = -3 \quad , \quad c = -19$

$\therefore r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} = \sqrt{1 + 9 + 19} = \sqrt{29} > 0$



جد أحداثيات مركز ونصف قطر الدائرة $2x^2 + 2y^2 + 12x - 8y + 6 = 0$

الحل :

نجعل معامل x^2 = معامل $y^2 = 1$

$\therefore [2x^2 + 2y^2 + 12x - 8y + 6 = 0] \quad \div 2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 4y + 3 = 0$

$\therefore C\,(-A/2 \,,\, -B/2) = C\,(-6/2 \,,\, 4/2)$

$\therefore C\,(-3 \,,\, 2)$ المركز

$\therefore r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 - 3} = \sqrt{9 + 4 - 3} = \sqrt{10}$

$\therefore r = \sqrt{10}$ units



أكتب المعادلة العامة للدائرة التي مركزها$C\,(1 \,,\, -3)$, $r = 2$ وحدات

الحل :

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$$

تبسيط المعادلة

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 4$$

المعادلة العامة :

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$$

مثال 4

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين $p_1(1 , -2)$, $p_2(4 , -3)$ ويقع مركزها على محور الصادات .

الحل : بما ان الدائرة يقع مركزها على محور الصادات

$\therefore C\ (0 , k)$

$\therefore r = p_1 c = \sqrt{(0-1)^2 + (k+2)^2} = \sqrt{1 + (k+2)^2}$

$r = p_2 c = \sqrt{(0-4)^2 + (k+3)^2} = \sqrt{16 + (k+3)^2}$

$\therefore \sqrt{1 + (k+2)^2} = \sqrt{16 + (k+3)^2}$ وبتربيع الطرفين

$1 + (k+2)^2 = 16 + (k+3)^2$ بالتبسيط

$\therefore 1 + k^2 + 4k + 4 = 16 + k^2 + 6k + 9$

$\Rightarrow 2k = -20 \quad \Rightarrow k = -20/2 = -10$

$\therefore C\ (0 , -10)$

$\Rightarrow r = \sqrt{1 + (-10+2)^2} = \sqrt{65}$ units

$\therefore x^2 + (y+10)^2 = 65$

مثال 5

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط $p_1\ (0 , 0)$, $p_2\ (2 , 0)$, $p_3\ (3 , -1)$

الحل :

$x^2 + y^2 + Ax + By + c = 0 \quad ......(1)$ معادلة الدائرة العامة

$p_1\ (0 , 0)$ تحقق المعادلة (1)

$\Rightarrow 0^2 + 0^2 + A(0) + B(0) + c = 0$

$\Rightarrow c = 0 \quad .... (2)$

$p_2\ (2 , 0)$ تحقق المعادلة (1)

$\Rightarrow 4 + (0)^2 + 2A + B(0) + 0 = 0$ من معادلة (2) $(c = 0)$

$\Rightarrow 2A = -4 \quad \Rightarrow \quad A = -2 \quad .....(3)$

$p_3\ (3 , -1)$ تحقق المعادلة (1)

$\Rightarrow 3^2 + (-1)^2 + 3A + B(-1) + c = 0 \quad .....(4)$

نعوض $A = -2$, $c = 0$ في معادلة (4)

$\Rightarrow 10 + 3(-2) - B + 0 = 0$

$\Rightarrow 10 - 6 - B = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 - B = 0 \quad \Rightarrow B = 4$

$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ المعادلة

مثال 6 جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين $p_1\ (2\ ,\ 1)$, $p_2\ (-1\ ,\ 1)$ ويقع مركزها على المستقيم الذي معادلته $2x - 4y - 5 = 0$

الحل : المعادلة العامة للدائرة $x^2 + y^2 + Ax + By + c = 0$

تحقق المعادلة العامة $p_1\ (2\ ,\ 1)$

$\Rightarrow 4 + 1 + 2A + B + c = 0$

تحقق المعادلة العامة $p_2\ (-1\ ,\ 1)$ $\Rightarrow 5 + 2A + B + c = 0 \quad .....(1)$

$\Rightarrow 2 - A + B + C = 0 \quad ......(2)$

من معادلة (1) و (2) $\Rightarrow 5 + 2A + B + C = 0$

بالطرح

$$\begin{array}{r} \mp 2 \pm A \mp B \mp C = 0 \\ \hline 3 + 3A = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow 3A = -3 \Rightarrow A = -3/3 \Rightarrow A = -1 \quad ....(3)$

مركز الدائرة يحقق معادلة المستقيم $2x - 4y - 5 = 0$, مركز الدائرة $\therefore C\ (-A/2\ ,\ -B/2)$

نعوض $\Rightarrow -A + 2B - 5 = 0\ ..(4) \Rightarrow 1 + 2B - 5 = 0 \Rightarrow 2B = 4 \Rightarrow B = 2$

نعوض في معادلة (1) , $\therefore A = -1\ ,\ B = 2$

$\Rightarrow 5 + 2(-1) + 2 + c = 0 \Rightarrow 5 - 2 + 2 + c = 0 \Rightarrow c = -5$

المعادلة $x^2 + y^2 - x + 2y - 5 = 0$

معادلة مماس الدائرة عند نقطة

لأيجاد معادلة مماس الدائرة :-

أولاً : نوجد ميل نصف القطر المار بنقطة التماس $(y_1\ ,\ x_1)$

ثانياً : نستنتج ميل المماس أنه عمود على نصف القطر المار بنقطة التماس (مقلوبة بعكس الاشارة)

ثالثاً : نجد معادلة المماس بمعلومية ميله ونقطة التماس. $\therefore (y - y_1) = m\ (x - x_1)$

مثال 7 اوجد معادلة مماس الدائرة $x^2+y^2 = 5$ عند النقطة $p(1\ ,\ 2)$

الحل :

$x^2+y^2 = 5$

$\therefore c = (0,0)$

$$\therefore m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-0}{1-0} = 2 \quad \text{(ميل نصف القطر)}$$

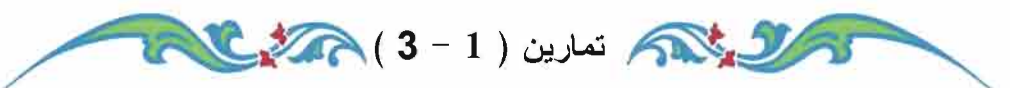
وبما ان المماس $\perp$ على نصف القطرفي نقطة التماس $\therefore m_2 = -1/2$

$\therefore (y - y_1) = m_2\ (x - x_1)$

(بضرب طرفي المعادلة بـــ 2) $\Rightarrow (y-2) = (-1/2)\ (x - 1)$

$\Rightarrow 2y - 4 = -x + 1$

معادلة المماس $\therefore x + 2y - 5 = 0$



تمارين (1 - 3)

1. بين أي من المعادلات الأتية تمثل معادلة دائرة .

a. $x^2 + 3y^2 - 2x + 3y = 0$

b. $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12$

c. $x^2 + y^2 + 2xy = 1$

d. $x^2 + y^2 = 0$

e. $y = -2x$

2. جد معادلة الدائرة في كل حالة من الحالات الآتية :

أ. مركزها $c(3,-2)$ ونصف قطرها 5 وحدات

ب. مركزها نقطة الاصل وتمر بالنقطة $p(-4,3)$

جـ. مركزها $c(-1, 5)$ وتمر بالنقطة $p(4, 3)$

3. جد معادلة الدائرة التي نهايتي قطر فيها $p_1(2, -3)$, $p_2(4, 1)$ بثلاثة طرق مختلفة .

4. جد أحداثيات المركز ونصف قطر الدوائر الآتية : -

a. $(x+5)^2 + (y-4)^2 = 36$

b. $(x-2)^2 + y^2 = 9$

c. $2x^2 + 2y^2 + 3x + 4y = 0$

5. جد معادلة الدائرة التي تمس المستقيم $y=4$ ومركزها $c(-2, -3)$

6. جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين الاحداثيين وتمس المستقيم $y=6$

7. جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة $(6, -3)$ وتمس المحورين الاحداثيين

8. جد معادلة الدائرة التي نصف قطرها 5 وحدات و تمس المحورين الاحداثيين والواقعة :-

أولاً : في الربع الثاني

ثانياً : في الربع الرابع

ثالثاً : في الربع الاول

9. اكتب المعادلة العامة للدائرة التي مركزها $c(2, -3)$ ونصف قطرها 4 وحدات .

10. جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين $p_1(3,-1)$ ، $p_2(5,1)$ ويقع مركزها على محور السينات

11. جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط $p_1(1, 0)$ ، $p_2(0, 1)$ ، $p_3(3, 4)$.

12. اوجد معادلة المماس للدائرة $(x-3)^2+(y-2)^2 = 5$ عند النقطة $p(1, 1)$

الفصل الرابع

Chapter 4

Circular Functions الدوال الدائرية

- [4-1] نبذة تأريخية .
- [4-2] التطبيق اللاف .
- [4-3] دالة الظل .
- [4-4] دوال دائرية اخرى .
- [4-4-1] تعريف .
- [4-4-2] تعريف .
- [4-4-3] تعريف .
- [4-5] العلاقات بين الدوال الدائرية .
- [4-6] استخدام الحاسبة .
- [4-7] الزوايا المنتسبة .
- [4-8] قيم الدوال الدائرية للزاوية التي قياسها ($-\theta$) .
- [4-9] الدوال الدائرية لمجموع أو فرق قياسي زاويتين .
- [4-10] المعادلات المثلثية .
- [4-11] رسم منحنيات الدوال المثلثية .

الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
$(n \times 90^\circ \pm \theta)$	الزاوية المنتسبة
$A'^2 = B'^2 + C'^2 - 2B'C' \cos A$	قانون الجيب تمام
$\frac{A'}{\sin A} = \frac{B'}{\sin B} = \frac{C'}{\sin C}$	قانون الجيب
x-axis , $\overleftrightarrow{xx'}$	المحور السيني
y-axis , $\overleftrightarrow{yy'}$	المحور الصادي

الفصل الرابع

Circular Functions الدوال الدائرية

[1-4] نبذة تاريخية :

عرف هذا العلم عند العرب بعلم الانساب وذلك لاستفادة من الأوجه المختلفة الناشئة من النسبة بين اطوال اضلاع المثلث ، واليهم يعود الفضل في جعله علماً منظماً له قوانينه الخاصة ومستقلاً عن الفلك الذي اعتبره اليونانيون علماً مساعداً لاعمالهم الفلكية .

وقد اضاف العرب اضافات هامة ودرسوا هذا العلم دراسة ممتازة عن الامم التي سبقتهم وبذلك اعتبر هذا العلم عربياً .

استعمل العرب النسبة المثلثية بدلاً من الاصطلاح (وتر ضعف القوس) الذي إستعمله اليونانيون وبذلك سهلوا الأعمال الرياضية وهم أول من أدخل (المماس - الظل) في اعداد النسب المثلثية ، وكذلك ظل التمام .

ان العالم العربي (أبو الوفاء البوزجاني) في القرن العاشر الميلادي هو الذي أدخل هذا الاصطلاح على أنه ماخوذ من ظلال الاجسام التي تتكون نتيجة سير الاشعة الضوئية المنبعثة من الشمس في خطوط مستقيمة .

وقد توصل العرب الى استخراج القواعد المتعلقة بالمثلثات الكروية القائمة وحل المسائل المتعلقة بالمثلثات الكروية المائلة وكذلك مساحات المثلثات الكروية ، واوجدوا الجداول الرياضية للجيب والظل والقاطع التمام واستعملوا طرقاً متنوعة لحساب هذه الجداول ، ووضعوا معادلات واشكالاً لحل المشكلات التي صادفتهم .

وألف جابر بن الأفلح المتوفي في قرطبة في منتصف القرن الثاني عشر للميلاد موسوعة من كتب في الفلك أولها في علم المثلثات الكروية .

ويعتبر البتاني (أبو عبد الله بن جابر بن سنان) المتوفي سنة 929 م من العلماء الذين ساعدوا على أن يصبح المثلثات علماً مستقلاً كذلك نبغ (ابن يونس المصري (1009 م)) في علم المثلثات وتوصل الى المتطابقة :

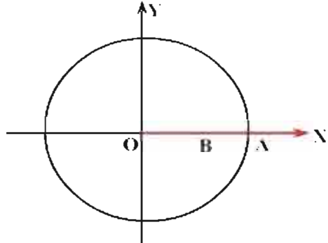
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\sin(x+y) + \frac{1}{2}\sin(x-y)$$

[4-2] التطبيق اللاف The winding mapping

ان التطبيق الذي يقرن اي عدد حقيقي بنقطة من دائرة الوحـــــــدة (Unit Circle)(أو بزاوية موجهة بالوضع القياسي) يسمى التطبيق اللاف .

وكما سبق أن تعلمت في الصف الرابع العلمي انه لو كانت لدينا زاوية موجهة في وضع قياسي مرسومة في دائرة الوحدة فأن لهذه الزاوية نقطة مثلثية واحدة وواحدة فقط .

ففي الشكل (4-1) النقطة المثلثية للزاوية $\overrightarrow{AOB}$ هي A وهي تقاطع الضلع النهائي للزاوية مع دائرة الوحدة



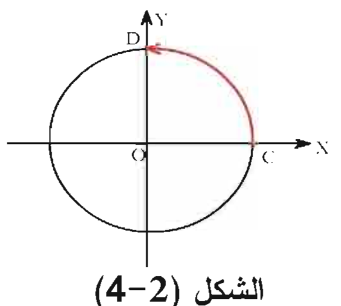
$\because$ A تقع على الجزء الموجب من محور السينات

(حيث r نصف قطر دائرة الوحدة) $r = OA \ , \ r = 1$

$\therefore \ A = (1,0)$

الشكل (4-1)

وفي الشكل (4-2) النقطة المثلثية للزاوية $\overrightarrow{COD}$ هي D وهي نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية مع دائرة الوحدة

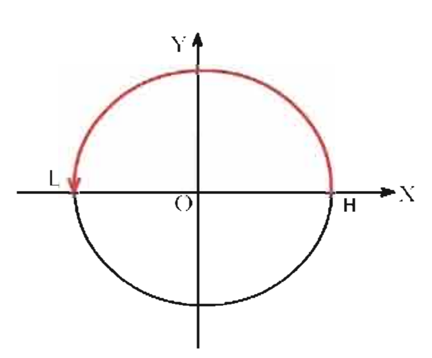


$\because$ D تقع على الجزء الموجب من محور الصادات

$\therefore \ D = (0,1)$

الشكل (4-2)

وفي الشكل (4-3) النقطة المثلثية للزاوية $\overrightarrow{HOL}$ هي L وهي تقاطع الضلع النهائي للزاوية مع دائرة الوحدة



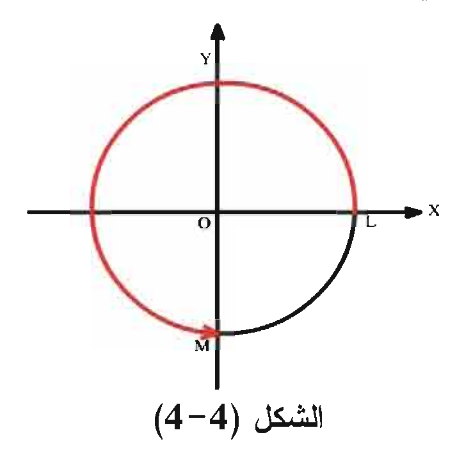
$\because$ L تقع على الجزء السالب من محور السينات

$\therefore \ L = (-1,0)$

الشكل (4-3)

وبالمثل في الشكل (4−4) النقطة المثلثية للزاوية $\overrightarrow{LOM}$ هي

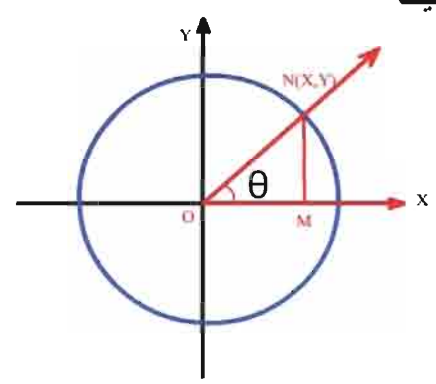
$\therefore\ M = (0,-1)$



الشكل (4−4)

وفي الشكل (4−5) النقطة المثلثية للزاوية $\overrightarrow{MON}$ هي N حيث

$\therefore\ N = (x,y)$



الشكل (4−5)

فاذا كانت θ عدداً حقيقياً ، وكانت $N = (x,y)$ النقطة الواقعة على دائرة الوحدة الموافقة للعدد θ فان العدد x هو cosine θ ويرمز له $\cos\theta$ حيث θ قياس الزاوية الموجهة بالوضع القياسي الذي يمر ضلعها النهائي من N

اما العدد y هو sine θ ويرمز له $\sin\theta$ حيث θ قياس الزاوية الموجهة بالوضع القياسي الذي يمر ضلعها النهائي من N

و بهذا نكون قد عرفنا دالتين مجال كل منهما R (مجموعة الاعداد الحقيقية) و المجال المقابل لكل منهما $[-1,1]$ وذلك لانه مهما يكن $\theta \in R$ فان

$$-1 \le \cos\theta \le 1$$

و $$-1 \le \sin\theta \le 1$$

تعريف

الجيب (sine) دالة مجالها R ومجالها المقابل $[-1,1]$ بحيث :

$$\forall \theta \in R \; : \sin\theta = y$$

حيث y الاحداثي الصادي للنقطة المثلثية .

جيب تمام (cosine) دالة مجالها R ومجالها المقابل $[-1,1]$ بحيث :

$$\forall \theta \in R \; : \cos\theta = x$$

حيث x الاحداثي السيني للنقطة المثلثية .

القياس الرئيس للزاوية :

ان أي زاوية موجهة بالوضع القياسي تقترن بمجموعة غير منتهية من الاعداد يدعى كل منها قياساً لهذه الزاوية . وقد جرت العادة على اعتبار القياس الدائري الذي يحقق العلاقة :

$$0 \le \theta < 2\Pi$$

أو القياس الستيني الذي يحقق العلاقة :

$$0 \le \theta < 360^\circ$$

وهو القياس الرئيس للزاوية.

واضح أن هذا القياس وحيد ، وأن بقية القياسات تنتج باضافة ($2k\Pi$) حيث (k) عدد صحيح ، الى القياس الرئيس θ حيث $\boxed{\text{Angle} = 2k\Pi + \theta}$



اوجد القياس الرئيس لكل من الزوايا الآتية :

a) $8.75\,\Pi$

b)66

الحل :

a) $8.75\,\Pi = 8\Pi + 0.75\,\Pi$

لكن $0.75\,\Pi = \frac{3}{4}\Pi$

$\therefore$ القياس الرئيس للزاوية التي قياسها (8.75Π) هو ($\frac{3}{4}\Pi$)

b) $66 = 66 \times \frac{7}{22} \quad \Pi$

$= 21\ \Pi$

$= 20\ \Pi + \Pi$

∴ القياس الرئيس للزاوية هو $\Pi \simeq 3.14$



احسب $\sin(-7\Pi/2)$

الحل :

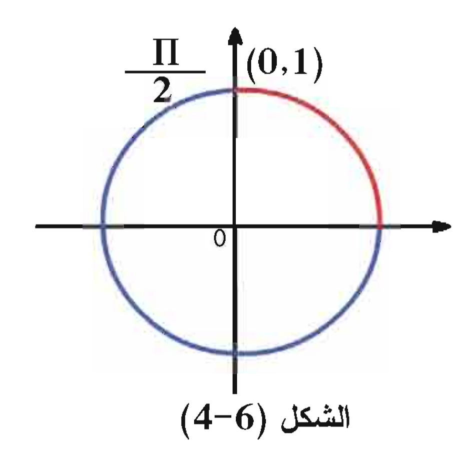
$-7\ \Pi/2 = -4\ \Pi + \Pi/2$

∴ القياس الرئيس للزاوية $-7\Pi\ /\ 2$ هو $\Pi/2$

$\therefore \sin(-7\Pi/2) = \sin \Pi/2$

$= 1$

(الاحداثي الصادي للنقطة المثلثية $(0,1)$)



الشكل (4-6)




تمارين (4-1)

1. جد القياسات الرئيسة لكل من الزاوايا التي قياساتها الآتية :

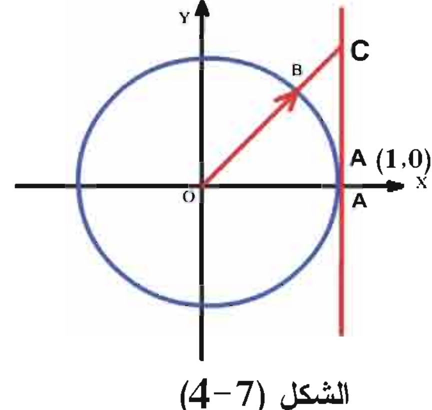
a. $21\ \Pi$ b. $\frac{-15}{2}\ \Pi$

2. جد الاعداد الحقيقية الآتية :

a. $\sin \Pi / 3$ b. $\cos 19\ \Pi / 6$ c. $\cos 24\Pi$

[4-3] دالة الظل (tangent) :

يمكن أن نحصل على هذه الدالة من دائرة الوحدة ، وذلك لو وضعنا مستقيماً مدرجاً على جميع الاعداد الحقيقية بحيث يكون مماساً للدائرة عند A (1,0)



الشكل (4-7)

(لاحظ الشكل (4-7)) وبشرط أن يكون العدد صفر منطبقاً على A فان نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية θ مع هذا الخط يمثل tan θ .

تعريف

دالة الظل : tan

$$tan : \{ \theta : \theta \in R \ , \cos\theta \neq 0 \} \to R ,$$

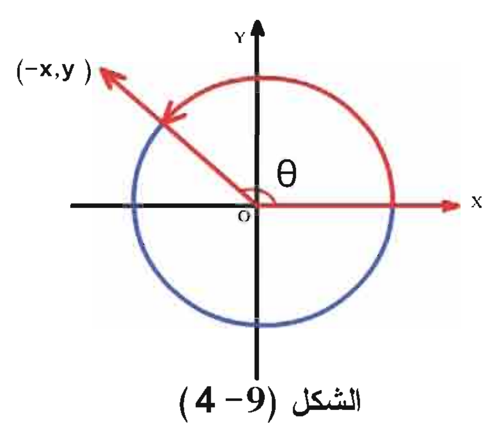
$$\tan\theta = \sin\theta / \cos\theta$$

نلاحظ ان دالة الظل(tan) هي الدالة الناتجة من sin θ /cosθ

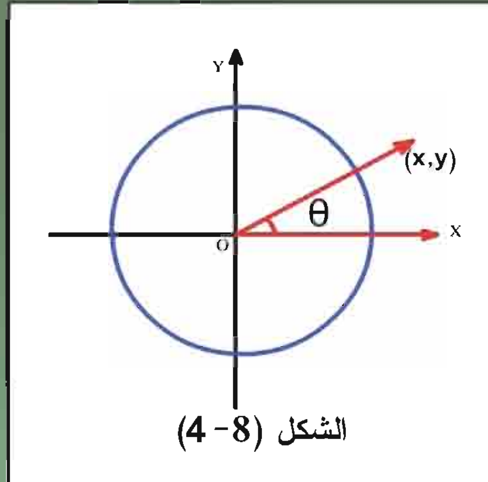
ملاحظات :

1. $0 < \theta < \frac{\Pi}{2}$ فان الزاوية θ تقع في الربع الاول وتكون النقطة المثلثية (x,y) ، اي $\sin\theta > 0$, $\cos\theta > 0$ لاحظ الشكل (5-8)
2. اذا كانت $\frac{\Pi}{2} < \theta < \Pi$ فان الزاوية θ تقع في الربع الثاني وتكون النقطة المثلثية (−x,y) اي ان $\sin\theta > 0$, $\cos\theta < 0$

لاحظ الشكل (4-9)



الشكل (4 -9)

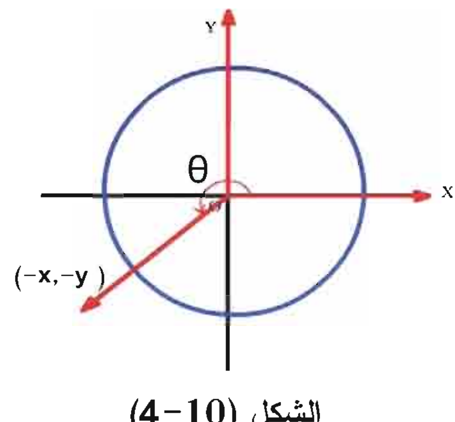


الشكل (4 -8)

3. اذا كانت $\frac{3\Pi}{2} > \theta > \Pi$ فأن الزاوية θ تقع في الربع الثالث وتكون النقطة المثلثية للزاوية θ هي $(-x,-y)$ وبهذا يكون :

$\sin\theta < 0 , \cos\theta < 0$ بالتالي فأن $\tan\theta > 0$

كما في الشكل (4-10)



الشكل (4-10)

4. اذا كانت $2\Pi > \theta > \frac{3\Pi}{2}$ فأن الزاوية θ تقع في الربع الرابع وتكون النقطة المثلثية للزاوية هي$(x,-y)$ وبهذا يكون:

$\sin\theta < 0 , \cos\theta > 0$ وبالتالي فأن $\tan\theta < 0$

كما في الشكل (4-11)

الشكل (4-11)

ويمكن وضع ماتقدم في الجدول الآتي :

الربع	sin	cos	tan
1	+	+	+
2	+	−	−
3	−	−	+
4	−	+	−

جدول اشارات الدوال المثلثية في الارباع

لتكن c دائرة الوحدة في الشكل (4-12)

B هي النقطة المثلثية للزاوية θ احداثياً B هي : $(\cos\theta , \sin\theta)$

نلاحظ أن $r= OB=1$

$BM = \sin\theta$

$OM = \cos\theta$

وبما ان المثلث OMB قائم الزاوية في M

حسب مبرهنة فيثاغورس نستنتج ان :

$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$

الشكل (4-12)

ملاحظة : نكتب عادة $\sin^2\theta$ بدلاً من $[\sin\theta]^2$

وكذلك $\cos^2\theta$ بدلاً من $[\cos\theta]^2$

وبالمثل نكتب $\sin^3\theta$ بدلاً من $[\sin\theta]^3$ وهكذا

اي ان القاعدة السابقة يمكن ان تكتب :

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

مثال 3

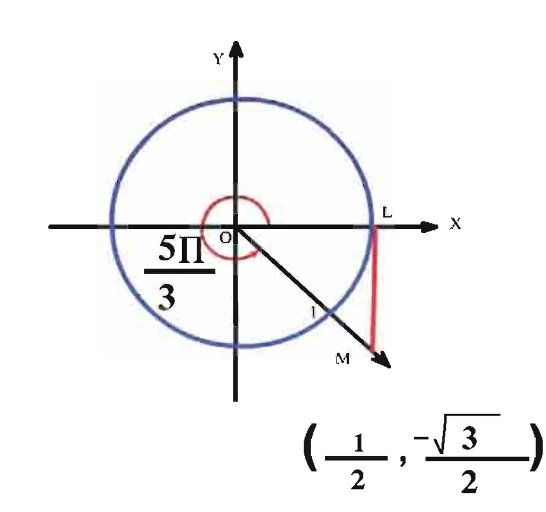
جد $\tan 5\Pi/3$

الحل : الزاوية $\theta = 5\Pi/3$ تنتهي في الربع الرابع فنجد من المثلث OML أن :

$$\tan\frac{5\Pi}{3} = \frac{\sin\frac{5\Pi}{3}}{\cos\frac{5\Pi}{3}}$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= -\sqrt{3} \simeq -1.732$$



$\left(\frac{1}{2} , \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

مثال 4

اذا كانت θ هو قياس الزاوية الموجهة بالوضع القياسي وكان $\sin\theta = \frac{3}{5}$

فاوجد قيمة $\cos\theta$, $\tan\theta$ علماً ان ضلع الزاوية النهائي التي قياسها θ يقع في الربع الثاني .

الحل :

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$9/25 + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow$

$\cos^2\theta = 1 - 9/25$

$= 16/25$

$\therefore \cos\theta = \pm 4/5$

وبما ان θ تقع في الربع الثاني

$\therefore \cos\theta < 0$

$\therefore \cos\theta = -4/5$

$\because \tan\theta = \sin\theta / \cos\theta$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{-4}{5}}$$

$= -3/4$



تمارين (2-4)



1. اوجد sin x , cos x , tan x اذا علمت ان الضلع النهائي للزاوية (x) الموجهة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقط المثلثية الآتية :

a. $\left(\frac{1}{\sqrt{5}} , -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

b. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3} , \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

c. $\left(\frac{1}{2} , \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

d. $\left(-0.6 , -0.8\right)$

2. جد ما يأتي :

a. $\sin\left(30\Pi\right)$

b. $\cos\left(-13\Pi/6\right)$

c. $\tan\left(4\Pi/3\right)$

d. $\cos\left(30\Pi\right)$

3. جد قيمة ما يأتي :

a. $\sin^2 3 + \cos^2 3$

b. $\cos^2 \Pi/6 - \sin^2 \Pi/6$

4. تحقق مما يأتي :

a. $\sin\frac{\Pi}{6}\cos\frac{\Pi}{3} + \cos\frac{\Pi}{6}\sin\frac{\Pi}{3} = \sin\frac{\Pi}{2}$

[4-4] دوال دائرية اخرى :

عرفنا في البنود السابقة الدوال الدائرية : tan , cos , sin

وباستخدام هذه الدوال يمكننا ان نعرف دوال اخرى وذلك كما يأتي :

1. الدالة cotangent (ظل تمام) ويرمز لها cot وهي الدالة الناتجة من مقلوب الدالة (الظل) tan .

اي ان : $\cot x = 1 / \tan x$

$= \cos x / \sin x$

تعريف [4-4-1]

دالة ظل التمام cot

$\cot : \{ \theta : \theta \in R , \sin \theta \neq 0 \} \to R ,$

$\cot \theta = \cos \theta / \sin \theta$

اي ان الدالة cot تعرف لكل الاعداد الحقيقية بشرط ($\sin \theta \neq 0$).

2. الدالة secant (قاطع) ويرمز لها secوهي الدالة الناتجة من مقلوب الدالة (cos)

اي ان $\sec x = 1/\cos x$

وهي تعرف لكل الاعداد الحقيقية x بشرط ($\cos x \neq 0$) بعبارة اخرى

تعريف[4-4-2]

دالة القاطع : sec

$\sec : \{\theta : \theta \in R , \cos \theta \neq 0 \} \to R ,$

$\sec \theta = 1/ \cos \theta$

3. الدالة cosecant (القاطع التمام) ويرمز لها csc وهي الدالة الناتجة من مقلوب الدالة (sin)

اي ان $\csc x = 1/\sin x$

وهي تعرف لكل الاعداد الحقيقية x بشرط $(\sin x \neq 0)$

تعريف[3-4-4]

دالة قاطع التمام : csc

$\csc: \{\theta : \theta \in R, \sin\theta \neq 0\} \to R,$

$\csc\theta = 1/\sin\theta$

مثال 5

اذا كان : $\frac{\Pi}{2} < x < \Pi$ وكان $\sin x = 5/13$ فجد كلاً من :

$\cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$

الحل :

$\because \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\therefore (5/13)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\cos^2 x = 1 - 25/169$

$\Rightarrow \cos^2 x = 144/169$

$\Rightarrow \cos x = \pm 12/13$

وبما ان $\frac{\Pi}{2} < x < \Pi$ اي انها تقع في الربع الثاني

$\therefore \cos x < 0$

$\therefore \cos x = -12/13$

$\because \tan x = \sin x / \cos x$

$$\therefore \tan x = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{-12}{13}}$$

$\therefore \tan x = -5/12$

$\therefore \cot x = -12/5$

$\sec x = 1/\cos x = -13/12$

$\csc x = 1/\sin x = 13/5$

[4-5] العلاقات بين الدوال الدائرية :

مبرهنة [1-5-4]

(المتطابقة الفيثاغورية)

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \forall \ x \in R$
2. $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \ , \ \forall x, \ x \neq (2n+1) . \Pi / 2$

حيث n اي عدد صحيح

3. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x \ , \ \forall x, \ x \neq n\Pi$

حيث n اي عدد صحيح

1. لقد سبق برهنتها في البنود السابقة .
2. اذا كان x اي عدد حقيقي ما عدا المضاعفات الفردية لــ $(\Pi/2)$ والتي تجعل

$(\cos x \neq 0)$ فأننا نقسم طرفي المتطابقة (1) على $\cos^2 x$ لنحصل على :

$$(\sin x / \cos x)^2 + (\cos x / \cos x)^2 = (1 / \cos x)^2 \Rightarrow$$
$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \ , \forall \ x \ , \ x \neq (2n+1)\Pi/2$$

حيث n عدد صحيح

وذلك لان :

$$\tan x = \sin x / \cos x$$
$$1/\cos x = \sec x$$

3. وبالطريقة السابقة نفسها اذا كان $x \neq n\Pi$ حيث n عدد صحيح ، يمكن قسمة طرفي المتطابقة (1) على $\sin^2 x$ فنحصل على :

$$(\sin x / \sin x)^2 + (\cos x / \sin x)^2 = (1 / \sin x)^2 \Rightarrow$$
$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x \ , \forall \ x \ , \ x \neq n\Pi$$

حيث n عدد صحيح

وذلك لان :

$$\frac{1}{\sin x} = \csc x \;, \quad \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$



اثبت صحة المتطابقة الآتية :

$$\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \csc^2 x \;, \; \forall x \;, \; x \neq n\,\Pi/2$$

حيث n عدد صحيح

الاثبات : الطرف الايسر

$$\sec^2 x + \csc^2 x = 1/\cos^2 x + 1/\sin^2 x$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}$$

$$= 1 / \cos^2 x \sin^2 x$$

$$= 1/\cos^2 x \;.\; 1/\sin^2 x$$

$$= \sec^2 x \csc^2 x$$

= الطرف الايمن



اثبت صحة المتطابقة الآتية :

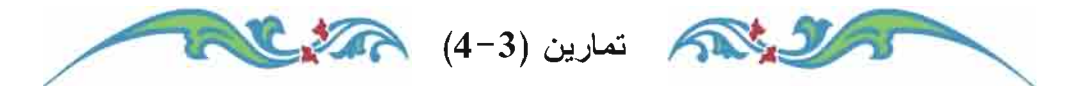
$$\frac{3\cos^2 x - \sin^2 x + 1}{\sin^2 x} = 4\cot^2 x$$

الاثبات : الطرف الايسر

$$\frac{3\cos^2 x - \sin^2 x + 1}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{3\cos^2 x + (1-\sin^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{3\cos^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{4\cos^2 x}{\sin^2 x} = 4\cot^2 x$$ الطرف الايمن



تمارين (3-4)

1. اذا كان $\frac{3\Pi}{2} < x < 2\Pi$ وكان $\cos x = 2/3$ فجد قيمة كل من :
$\csc x , \sec x , \cot x$

2. اذا كان $\Pi < x < \frac{3\Pi}{2}$ وكان $\tan x = 7/3$ فجد قيمة كل من :
$\csc x , \sec x , \cot x$

3. اثبت صحة المتطابقات الأتية :

a. $\tan x = \sin x \sec x$

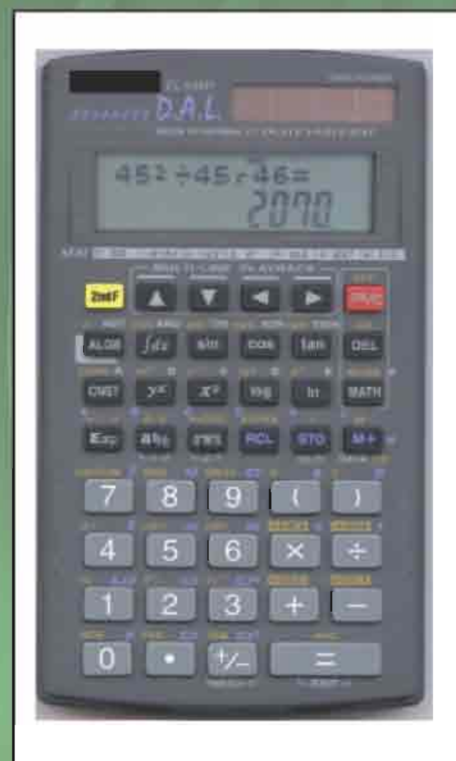
b. $\sec^2 x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{1-\sin^2 x}$

c. $(1-\sin^2 x)(1+\tan^2 x) = 1$

d. $\frac{1-\cos^2 x}{\tan x} = \sin x \cos x$

e. $\frac{1+\sin x - \sin^2 x}{\cos x} = \cos x + \tan x$

[4-6] استخدام الحاسبة Using calculators



لقد سبق ان تعلمت استخدام الحاسبة لايجاد قيم الدوال sin , cos , tan مباشرة لأية زاوية والأن نتعلم استخدام الحاسبة لايجاد قيم الدوال csc , sec , cot ، مباشرة لأية زاوية . مع ملاحظة نظام الزاوية (D E G) درجات او (R A D) نصف قطري

مثال 8 جد $\csc 51^\circ$ باستخدام الآت الحاسبة

فنجد كما مر سابقاً $\sin 51^\circ$ اي نضغط على المفاتيح بالترتيب التالي من اليسار الى اليمين .

[sin] [1] [5]

فيظهر على الشاشة 0.7771459

وهذا يعطي $\sin 51^\circ = 0.7771459$

ثم نضغط على المفاتيح بالترتيب التالي من اليسار الى اليمين .

[1/x] [2ndf]

فيظهر على الشاشة 1.2867597 والذي يساوي $\csc 51^\circ$.(مقلوب sin)

ملاحظة : هناك حاسبات موجودة عليها مفتاح INV بدلاً من 2ndf

مثال 9 جد $\cot 35^\circ 22'$, $\sec 35^\circ 22'$, $\csc 35^\circ 22'$ باستخدام الحاسبة

الحل :

1. نحول الدقائق الى كسر عشري من الدرجات بالضغط على المفاتيح بالترتيب التالي من اليسار الى اليمين :

[2] [2] [÷] [60] =

فيظهر على الشاشة العدد 0.3666666

2. ثم نكمل كتابة قياس الزاوية بالضغط علي المفاتيح :

[+] [3] [5]

يظهر على الشاشة العدد 35.366667

3. نجد قيمة tan بالضغط على مفتاح tan فيظهر على الشاشة العدد :

0.620751391

4. نجد مقلوب الدالة tan لنحصل على cot بالضغط على المفاتيح :

2nd	1/x

يظهر على الشاشة العدد

$\therefore \quad \cot 35° \, 22' = 1.61095086$

وبالاسلوب نفسه اكمل حل المثال لايجاد كل من $\sec 35° \, 22'$, $\csc 35° \, 22'$

[4-7] الزاوية المنتسبة

تعريف

اذا كان θ قياس لزاوية حادة فأي زاوية قياسها على الصورة($n \times 90° \pm \theta$)، حيث n عدد صحيح (غير سالب) تسمى زاوية منتسبة للزاوية الحادة التي قياسها θ

فمثلاً : الزاوية التي قياسها (150°) منتسبة للزاوية الحادة (30°) لأن :

$$(150°) = (2\times90° - 30°)$$

والزاوية 240° منتسبة للزاوية 60° لأن :

$$(240°) = (2\times90° + 60°)$$

والزاوية 300° منتسبة للزاوية 60° لأن :

$$(300°) = (4\times90° - 60°)$$

والزاوية −30° هي زاوية منتسبة للزاوية 30° لأن :

$$(-30°) = (0\times90° - 30°)$$

واستناداً الى التعريف السابق فانه اذا كانت θ قياس زاوية حادة فأن الزوايا التي قياساتها :

$(180°-\theta)$ ، $(180°+\theta)$ ، $(360°-\theta)$ ، $(360°+\theta)$،

$(90°-\theta)$ ، $(90°+\theta)$ ، $(0+\theta)$ ، $(0-\theta)$ ،

$(270°+\theta)$ ، $(270°-\theta)$ ، هي زوايا منتسبة للزاوية θ .

فمثلاً :

$240° = (270° - 30°)$ أو $240° = (180° + 60°)$

$135° = (90° + 45°)$ أو $135° = (180° - 45°)$

$300° = (270° + 30°)$ او $300° = (360° - 60°)$

$330° = (270° + 60°)$ او $330° = (360° - 30°)$

ملاحظة: اذا كان قياس الزاوية اكبر من 360° (اي اكبر من 2Π) نبدأ بطرح 360° أو مضاعفاتها

(او طرح 2Π أو مضاعفاتها اذا كانت بالقياس الدائري) ليصبح القياس رئيسياً أي يصبح قياس الزاوية ينتمي الى $[0,360^\circ)$ أو ينتمي الى $[0 , 2\Pi)$.

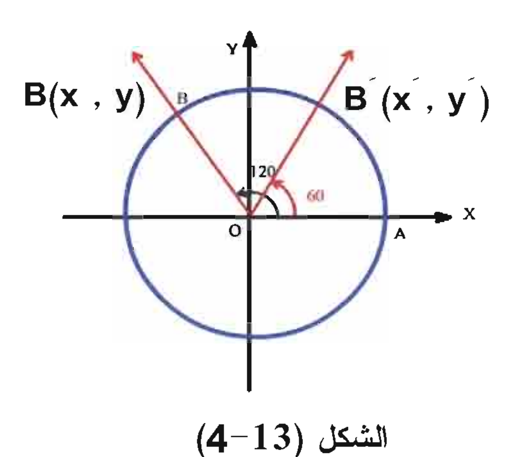
مثال 10 جد $\cos 120^\circ$, $\sin 120^\circ$ دون استخدام الآلة الحاسبة.

الحل:

1. ان الزاوية $\overrightarrow{AOB}$ التي قياسها $= 120^\circ$ تقع في الربع الثاني. (لاحظ الشكل 13-4)

اذ أن: $B(x , y) = B(\cos 120^\circ , \sin 120^\circ)$

ولكن $B \rightarrow B'$ تحت تأثير انعكاس في المحور Y



الشكل (13-4)

$\therefore B'(x' , y') = (\cos 60^\circ , \sin 60^\circ)$

ولكن $x = - x'$

$\therefore \cos 120^\circ = - \cos 60^\circ = -1/2$

كذلك $y = y'$

$\therefore \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$

وبما أن: $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$

$= 2 \times 90^\circ - 60^\circ$

$\therefore$ 120° منتسبة للزاوية 60°

من المثال السابق نلاحظ أن

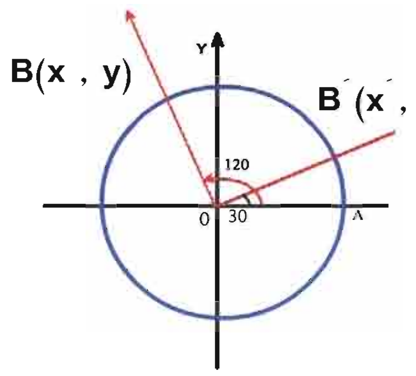
$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$

$\cos 120^\circ = - \cos 60^\circ = -1/2$

2. ان الزاوية $\overrightarrow{AOB}$ التي قياسها = 120° تقع في الربع الثاني كما اسلفنا اذ إن

$$B(x , y) = B(\cos 120° , \sin 120°)$$

ولكن $B' \rightarrow B$ تحت تأثير دوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها 90°.



$\therefore B' = (-\sin 30° , \cos 30)$

$B' = (\cos (90°+30°) , \sin (90°+30°))$

$\therefore \cos (90°+30°) = -\sin 30 = -1/2$

$\sin (90°+30°) = \cos 30° = \sqrt{3}/2$

الشكل (4-14)

نشاط1: باستخدام دائرة الوحدة والانعكاس في نقطة الاصل (0)، أوجد

$\sin 210° , \cos 210°$

نشاط 2 : باستخدام دائرة الوحدة والانعكاس في المحور السيني اوجد

$\sin 315° , \cos 315°$

ملاحظات:

لايجاد قيم الدوال الدائرية لأية زاوية نتبع الآتي:

1. نجد القياس الرئيسي للزاوية اذا كان قياسها اكبر من 360° او اكبر من 2Π

نضع قياس الزاوية الرئيسية على الصورة($n\Pi/2 \pm \theta$)أو($n \times 90° \pm \theta$)

حيث n عدد صحيح موجب أي يأخذ القيم (... , 4 , 3 , 2 , 1) θ قياس زاوية حادة.

أ. اذا كان n عدد صحيح فردي، أي يأخذ القيم: ... , 5 , 3 , 1

فان قيم الدالة الدائرية للزاوية ($n\Pi/2 \pm\theta$) تتغير من:

$\sin (n\Pi/2 \pm \theta)$ الى $\cos$

ومن $\cos (n\Pi/2 \pm \theta)$ الى $\sin \theta$

ومن $\tan (n\Pi/2 \pm \theta)$ الى $\cot \theta$

ومن $\sec (n\Pi/2 \pm \theta)$ الى $\csc \theta$

ومن $\cot (n\Pi/2 \pm \theta)$ الى $\tan \theta$

ومن $\csc (n\Pi/2 \pm \theta)$ الى $\sec \theta$

مع مراعاة اشارة الدالة في الربع الذي تقع فيه الزاوية $(n\pi/2 \pm \theta)$

ب. اذا كان n عدد زوجي موجب أي تأخذ القيم: ... , 6 , 4 , 2

فان قيم الدالة الدائرية للزاوية $(n\pi/2 \pm \theta)$ لا تتغير وتظل كما هي

اي $\sin(n\pi/2 \pm \theta)$ تؤول الى $\sin\theta$ وكذلك, $\cos(n\pi/2 \pm \theta)$

تؤول الى $\cos\theta$ ، وهكذا بقية الدوال الاخرى، مع مراعاة اشارة الدالة في الربـــــع الذي تقع في الزاوية$(n\pi/2 \pm \theta)$

جـ. يحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية θ وننسبها لاحدى زاويتي هذا الربع.

فمثلاً:

في الربع الاول: ننسب للزاوية $90° - \theta$ الى $360°+\theta$

وفي الربع الثاني: ننسب للزاوية $90°+\theta$ الى $180° - \theta$

وفي الربع الثالث: ننسب للزاوية $180° + \theta$ الى $270°-\theta$

وفي الربع الرابع: ننسب للزاوية $270°+\theta$ الى $360°-\theta$

مثال 11 جد قيم الدوال الدائرية للزوايا التي قياساتها:

$30°$, $150°$, $210°$, $330°$, $420°$

الحل:

أ. الزاوية التي قياسها $30°$ تقع في الربع الاول

$\therefore \sin 30° = 1/2$, $\cos 30° = \sqrt{3}/2$, $\tan 30° = 1/\sqrt{3}$

$\csc 30° = 2$, $\sec 30° = 2/\sqrt{3}$, $\cot 30° = \sqrt{3}$

ب. الزاوية التي قياسها $150°$ تقع في الربع الثاني

$\therefore \sin 150° = \sin(180° - 30°)$ $= \sin 30° = 1/2$	or	$\sin 150° = \sin(90° + 60°)$ $= \cos 60° = 1/2$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\sqrt{3}/2$$

or

$$\cos 150^\circ = \cos(90^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\sqrt{3}/2$$

$$\tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -1/\sqrt{3}$$

or

$$\tan 150^\circ = \tan(90^\circ + 60^\circ) = -\cot 60^\circ = -1/\sqrt{3}$$

$$\cot 150^\circ = \cot(180^\circ - 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

or

$$\cot 150^\circ = \cot(90^\circ + 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec 150^\circ = \sec(180^\circ - 30^\circ) = -\sec 30^\circ = -2/\sqrt{3}$$

or

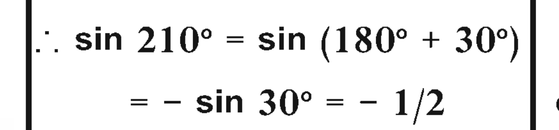
$$\sec 150^\circ = \sec(90^\circ + 60^\circ) = -\csc 60^\circ = -2/\sqrt{3}$$

$$\csc 150^\circ = \csc(180^\circ - 30^\circ) = \csc 30^\circ = 2$$

or

$$\csc 150^\circ = \csc(90^\circ + 60^\circ) = \sec 60^\circ = 2$$

جـ الزاوية التي قياسها 210° تقع في الربع الثالث



$$\therefore \sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -1/2$$

or

$$\sin 210^\circ = \sin(270^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -1/2$$

نشاط: اكمل قيم الدوال المثلثية الباقية للزاوية التي قياسها 210°

د. الزاوية التي قياسها 330° تقع في الربع الرابع

$\sin 330° = \sin(270° + 60°)$ $= -\cos 60° = -1/2$	or	$\sin 330° = \sin(360° - 30°)$ $= -\sin 30° = -1/2$

نشاط: اكمل قيم الدوال المثلثية الباقية للزاوية التي قياسها 330°

هـ. الزاوية التي قياسها $420° = 60° + 360$

ان قيم الدالة المثلثية للزاوية (360°+60°) هي نفس قيمة الزاوية المثلثية (60°) لماذا ؟

ملاحظة : لقد سبق ان ذكرنا بانه اذا كان قياس الزاوية اكبر من 360° نطرح 360° أو مضاعفاتها من هذا القياس الى يصبح القياس 60°هو القياس الرئيسي للزاوية ،وعليه فان $420° - 360° = 60°$

$$\therefore \sin 420° = \sin 60° = \sqrt{3}/2$$

$$\cos 420° = \cos 60° = 1/2$$

نشاط : اكمل قيم الدوال الدائرية الباقية للزاوية 420°

[4-8] قيم الدوال الدائرية للزاوية التي قياسها (θ -)

اولاً : اذا كانت الزاوية التي قياسها (θ) تقع في الربع الاول فان الزاوية التي قياسها (θ -) تقع في الربع الرابع

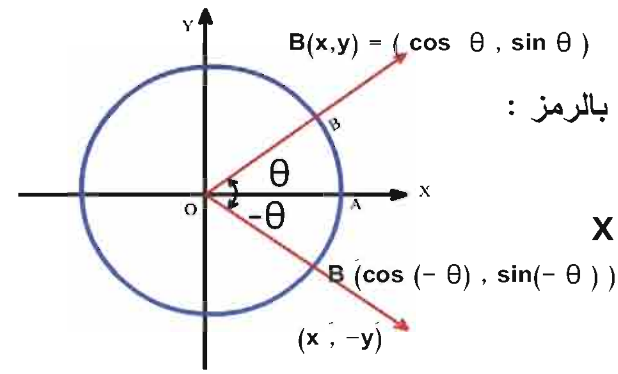
لاحظ الشكل (4-15)

إن الزاوية AOB التي قياسها (θ) نرمز لها بالرمز :

$B(x,y) = (\cos\theta, \sin\theta)$

لكن $B \to B'$ تحت تأثير انعكاس حول محور X

لذا فأن



الشكل (4-15)

$B'(\cos(-\theta), \sin(-\theta))$

ولكن : $x \to x'$ ، $y \to -y'$

لذا فأن

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

ويكون $\tan(-\theta) = \sin(-\theta) / \cos(-\theta)$

$= -\sin\theta / \cos\theta$

$$\boxed{\tan(-\theta) = -\tan(\theta)}$$

ملاحظة: يمكن اثبات النتيجة السابقة نفسها في حالة وقوع الزاوية التي قياسها ($-\theta$) في الارباع: الثاني أو الثالث أو الأول وبالطريقة السابقة نفسها.

مثال 12

جد($\sin(-240^\circ)$, $\cos(-240^\circ)$

الحل :

$\sin(-240) = -\sin 240^\circ$

$= -\sin(180^\circ + 60^\circ)$

$= \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

, $\cos(-240^\circ) = \cos(240^\circ)$

$= \cos(180^\circ + 60^\circ)$

$= -\cos 60^\circ = -1/2$

مثال 13

جد $\sin(19\Pi/2)$, $\cos 780^\circ$, $\tan(-300^\circ)$

الحل :

$\sin(19\Pi/2) = \sin(\frac{3\Pi}{2} + 8\Pi)$

$= \sin(\frac{3\Pi}{2})$

$= -1$

$\cos 780^\circ = \cos(2 \times 360 + 60^\circ)$

$= \cos 60^\circ$

$= 1/2$

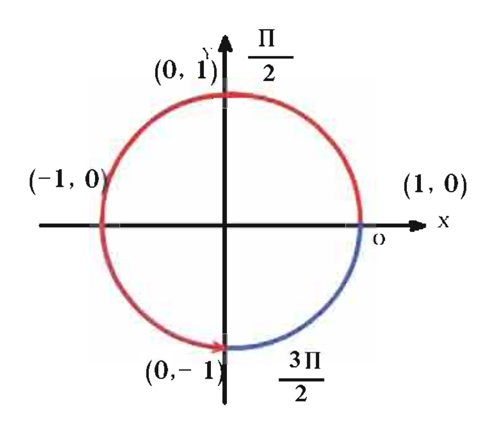
$\tan(-300^\circ) = -\tan 300^\circ$

$= -\tan(360 - 60)$

$= -(-\tan 60)$

$= \tan 60$

$= \sqrt{3}$



الشكل (4-16)




تمارين (4-4)

1. اذا كان $\sin\theta = -8/17$, θ تقع في الربع الثالث فجد :

$\cos\theta$, $\cos(3\Pi/2 - \theta)$, $\sin(\Pi/2 + \theta)$

2. اذا كان $\cos\beta = 0.8$ $270° < \beta < 360°$ فجد :

$\sin\beta$, $\cos(270° + \beta)$, $\cos(270° - \beta)$

3. اذا كان $\sin\propto = 24/25$ $90° < \propto < 180°$ فاحسب قيمة :

$\sin(90° - \propto) - \cos(180° - \propto) + \cos 120°$

4. اثبت انه

$\cos(\Pi/2 + \theta)\cos(\Pi/2 - \theta) - \sin(\Pi + \theta)\sin(\Pi - \theta) = 0$

5. حدد الربع الذي تقع فيه الزاوية $\propto$ اذا كان :

a. $\sin\propto > 0$, $\cos\propto > 0$

b. $\sin\propto > 0$, $\cos\propto < 0$

c. $\sin\propto < 0$, $\cos\propto < 0$

d. $\sin\propto < 0$, $\cos\propto > 0$

6. اي العبارات الاتية صحيحة وأيها خاطئة ؟

a. $\sin 270° = 2\sin 30°$

b. $\sin 90° = 2\cos 60°$

c. $\cos 150° = 1/2\tan 120°$

d. $\cos(30° + 60°) = \cos 30° + \cos 60°$

7. اثبت ان :

a. $\sin(90° + \propto) + \cot(270° - \propto) + \cos(180° + \propto) = \tan\propto$

b. $\sin^2 135° = 1/2(1 - \cos 270°)$

[4-9] الدوال الدائرية لمجموع أو فرق قياسي زاويتين :

سوف نبحث في هذا البند دوال مثل $\cos(x_1 - x_2)$, $\cos(x_1 + x_2)$ وعلاقة ذلك بالدوال

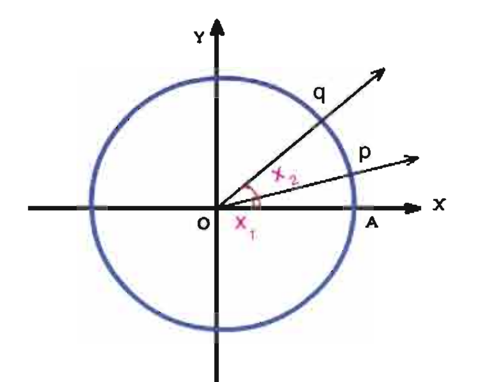
$\cos x_1$, $\sin x_1$, $\cos x_2$, $\sin x_2$

اولاً: مفكوك $\cos(x_2 - x_1)$, $\cos(x_2 + x_1)$

ولايجاد هذه العلاقة سنستخدم الصلة بين الدوال الدائرية وحاصل الضرب الداخلي للمتجهات (Inner Product)

وكما تعلم انه اذا كان θ هي الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{op}$, $\overrightarrow{oq}$ الموضحين في الشكل (17−4) حيث:

$(\theta = x_2 - x_1$ وان , $0 \le \theta \le \Pi)$



الشكل (17−4)

فان:

$$\overrightarrow{op} . \overrightarrow{oq} = \|\overrightarrow{op}\| . \|\overrightarrow{oq}\| . \cos(x_2 - x_1).$$

فاذا اخذنا الحالة الخاصة $\|op\| = \|oq\| = 1$

وجدنا أن:

$$\overrightarrow{op} . \overrightarrow{oq} = \cos(x_2 - x_1).$$

$$\therefore (\cos x_1 , \sin x_1) . (\cos x_2 , \sin x_2) = \cos(x_2 - x_1).$$

ومنه نجد :

$$\boxed{\cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2 = \cos(x_2 - x_1).} \quad ...1$$

واذا عوضنا بـــ $(-x_1)$ بدلاً من x_1 تصبح المتطابقة (1):

$$\cos(-x_1) \cos x_2 + \sin(-x_1) \sin x_2 = \cos(x_2 + x_1).$$

$$\boxed{\therefore \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2 = \cos(x_2 + x_1).} \quad ...2$$



احسب $\cos 15°$, $\cos 75°$

الحل:

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°)$$

$$= \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos 15^\circ = \cos (45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

ثانياً: مفكوك $\sin (x_2 + x_1)$, $\sin (x_2 - x_1)$

$$\because \sin (x_2 + x_1) = \cos [90^\circ - (x_2 + x_1)]$$

$$= \cos [(90^\circ - x_2) - x_1]$$

$$= \cos (90^\circ - x_2) \cos x_1 + \sin (90 - x_2) \sin x_1$$

$$\boxed{\sin (x_2 + x_1) = \sin x_2 \cos x_1 + \cos x_2 \sin x_1} \quad \dots 3$$

وبالتعويض عن x_1 بـ $(-x_1)$ لتصبح المتطابقة (3)

$$\boxed{\sin(x_2 - x_1) = \sin x_2 \cos x_1 - \cos x_2 \sin x_1} \quad \dots 4$$



احسب $\sin 15^\circ , \sin 75^\circ$

الحل:

$$\sin 75^\circ = \sin (45^\circ + 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin 15^\circ = \sin (45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

ثالثاً: مفكوك : $\tan (x_1 + x_2)$, $\tan (x_1 - x_2)$

اذا كــــــان x_1 , x_2 أي عددين حقيقين في مجال الدالــــــــة $\tan$ وان $x_1 + x_2$ مجال الدالة $\tan$ فان:

$$\tan (x_1 + x_2) = \frac{\sin (x_1 + x_2)}{\cos (x_1 + x_2)}$$

$$= \frac{\sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2}{\cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2}$$

وبقسمة البسط والمقام على $\cos x_1 \cos x_2$ نحصل على:

$$\frac{\dfrac{\sin x_1 \cos x_2}{\cos x_1 \cos x_2} + \dfrac{\cos x_1 \sin x_2}{\cos x_1 \cos x_2}}{\dfrac{\cos x_1 \cos x_2}{\cos x_1 \cos x_2} - \dfrac{\sin x_1 \sin x_2}{\cos x_1 \cos x_2}}$$

$$= \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2}$$

$$\therefore \tan(x_1 + x_2) = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2} \quad \cdots\cdots 5$$

ولو عوضنا بـــ $(-x_2)$ بدلاً من (x_2) في المتطابقة (5) لحصلنا على:

$$\tan(x_1 - x_2) = \frac{\tan x_1 - \tan x_2}{1 + \tan x_1 \tan x_2} \quad \ldots 6$$

مثال 16 احسب $\tan 15^\circ , \tan 75^\circ$

الحل:

$$\tan 75^\circ = \tan (45^\circ + 30^\circ)$$

$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\therefore \tan 75^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$\tan 15^\circ = \tan (45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\therefore \tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

نتيجة (1): لكل عدد حقيقي x فان:

a. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

b. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

c. $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$

d. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

e. $\tan 2x = 2 \tan x / (1 - \tan^2 x)$

بشرط المقام ≠ صفر



مثال 17 اذا كان $\sin \propto = 4/5$, $0 < \propto < 90^\circ$ فاحسب :

$\sin 2\propto$, $\cos 2\propto$, $\tan 2\propto$

الحل :

$$\sin^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$$

$$\therefore 16/25 + \cos^2 \propto = 1$$

$$\therefore \cos^2 \propto = 1 - 16/25$$

$$= 9/25$$

$$\therefore \cos \propto = \pm 3/5$$

$$\because 0 < \propto < 90^\circ$$

$$\therefore \cos \propto = 3/5$$

$$\therefore \sin 2\propto = 2\sin\propto\cos\propto$$

$$\therefore \sin 2\propto = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5}$$

$$= 24/25$$

$$\because \cos 2\propto = \cos^2\propto - \sin^2\propto$$

$$= 9/25 - 16/25$$

$$= -7/25$$

$$\because \tan 2\propto = \frac{\sin 2\propto}{\cos 2\propto}$$

$$\therefore \tan 2\propto = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{-7}{25}} = \frac{-24}{7}$$

نتيجة (2)

لكل x عدد حقيقي فان :

1. $$\sin^{2}(x/2) = \frac{1-\cos x}{2}$$

2. $$\cos^2 (x/2) = \frac{1+\cos x}{2}$$

مثال 18 احسب $\sin \Pi/8$, $\cos \Pi/8$

$$\sin^2 \Pi/8 = \frac{1 - \cos \Pi/4}{2}$$

$$= \frac{1 - 1/\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}$$

يضرب البسط والمقام في $\sqrt{2}$

$$= \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \sin \Pi/8 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos^2 \Pi/8 = \frac{1 + \cos \Pi/4}{2}$$

$$\cos \Pi/8 = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

مثال19 بدون : استخدام الحسابات احسب

الحل:

$\cos 105^{\circ} \quad , \quad \sin 105^{\circ}$

الحل : الزاوية 105° تقع في الربع الثاني وهي نصف الزاوية 210° وبأستخدام قانون نصف الزاوية $\cos(\frac{\theta}{2}), \sin(\frac{\theta}{2})$ نحصل على :

$$\sin 105 = \sqrt{\frac{1-\cos 210^{\circ}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos(180^{\circ}+30^{\circ})}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-(-\cos 30)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos 105 = \sqrt{\frac{1+\cos 210^{\circ}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos(180^{\circ}+30^{\circ})}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+(-\cos 30^{\circ})}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$



مثال20 بين أن:

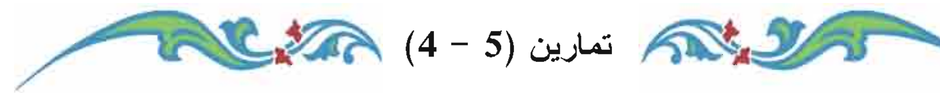
$$\cos^4 x/2 - \sin^4 x/2 = \cos x \ , \ \forall \ x \in R$$

الحل:

$$\cos^4 x/2-\sin^4 x/2=(\cos^2 x/2-\sin^2 x/2)(\cos^2 x/2+\sin^2 x/2)$$

$$= \cos\left(2\ (x/2)\right)\ (1)$$

$$= \cos x$$



تمارين (5 - 4)

.1

اذا كان $\tan x = 3/4$ وكانت $0 < x < 90^\circ$ فاحسب:

$\tan 2x \; , \; \cos 2x \; , \; \sin 2x$

.2

اذا اكان $0 < \propto < \Pi/2 \; , \; \sec \propto = \sqrt{5}/2$

فاحسب: $\cot 2\propto \; , \; \csc 2\propto$

.3

اذا كان $90^\circ < \propto < 180^\circ \; , \; \tan^2 \propto = 4/9$

فاحسب: $\sin(2\propto - 90^\circ) \; , \; \cos(180^\circ - 2\propto)$

.4

اذا كان كل من $\propto$، β زاوية حادة موجبة بحيث $\beta + \propto = 45^\circ$ وكان $\tan\propto / \tan\beta = 2/3$

فاحسب: $\tan 2\propto \; , \; \tan 2\beta$

.5 اثبت أن:

$$\left|\cot \propto/2\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \propto}{1 - \cos \propto}}$$

ثم احسب $\cot 15^\circ$ بدون استخدام الحاسبات

.6 اثبت صحة المتطابقات الآتية:

a. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$

b. $\sec(x-y) = \dfrac{\sec x \sec y}{1 + \tan x \tan y}$

c. $\dfrac{\sin(-\propto) - \sin(\beta - 90^\circ)}{-\cos(270^\circ + \propto) + \cos\beta} + \dfrac{\sin(\propto - 180^\circ) + \cos(-\beta)}{\sin(180^\circ + \propto) + \sin(\beta + 90)}$

d. $\tan(270^\circ - \propto) + \dfrac{\sin(180^\circ - \propto)}{1 - \cos(180^\circ - \propto)} = \csc \propto$

e. $\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 20^\circ \sin 10^\circ = 1/2$

f. $\cos 35° \cos 25° - \cos 55° \cos 65° = 1/2$

g. $\sin^2 x \cos^2 x = \dfrac{1 - \cos 4x}{8}$

h. $\sin 4x = 8 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin x$

7. احسب $\sin 3x$, $\cos 3x$ بدلالة $\sin x$, $\cos x$

[4-10] المعادلات المثلثية :

تعريف

المعادلة المثلثية هي جملة مفتوحة تحوي دالة مثلثية أو اكثر لزاوية معينة أو عدة زوايا ، وابسط صورها هي : $\sin x = B$, $\cos x = k$ حيث $x \in R$, $B, k \in [-1,1]$

اولاً: المعادلات المثلثية البسيطة :

ليكن x قياس زاوية مجهولة ، θ قياس زاوية معلومة بحيث $0 \le \theta \le 2\Pi$ ، ولندرس الحلات الثلاث الاتية :

a.

$$\sin x = \sin \theta \Leftrightarrow x = \theta \quad or \quad x = \Pi - \theta$$

وبالمقياس الستيني : $x = \theta \quad or \quad x = 180° - \theta$

مثال 21

اذا كان $\sin x = \sin 45°$ فما قيم x ؟

الحل :

$$\sin x = \sin 45° \Leftrightarrow x = 45° \quad or \quad x = 180° - 45°$$

اي ان : $x = 45° \quad or \quad x = 135°$



حل المعادلة : $\sin x = 1/2$

الحل : نعلم ان $\sin 30° = 1/2$

$\sin x = \sin 30° \Leftrightarrow \quad x = 30° \quad or \quad x = 180 - 30° = 150°$

b.

$\cos x = \cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad x = \theta \quad or \quad x = 2\Pi - \theta$
وبالقياس الستيني يعني أن : $x = \theta \quad or \quad x = 360° - \theta$

مثال 23 حل المعادلة $\cos x = \cos 75°$

الحل :

$\cos x = \cos 75° \Leftrightarrow \quad x = 75° \quad or \quad x = 360° - 75°$

اي ان : $x = 75° \quad or \quad x = 285°$

مجموعة الحل = $\{75°, 285°\}$

مثال 24 حل المعادلة $\cos x = -1/2$

الحل : بما أن $\cos x < 0 \quad \therefore \quad x$ تقع في أحد الربعين الثاني أو الثالث

وهي منتسبة الى كل من $180° - 60°, \quad 180° + 60°$

لان $\cos 60 = 1/2$

$\cos x = -1/2 \Leftrightarrow \quad x = 120° \quad or \quad x = 240° \Rightarrow$ مجموعة الحل = $\{120°, 240°\}$

c.

$\tan x = \tan\theta \quad \Leftrightarrow \quad x = \theta \quad or \quad x = \Pi + \theta$
وبالقياس الستيني يعني أن : $x = \theta \quad or \quad x = 180° + \theta$

مثال 25 حل المعادلة $\tan x = \tan 53°$

الحل :

$\tan x = \tan 53° \Leftrightarrow \quad x = 53° \quad or \quad x = 180° + 53°$

$x = 53° \quad or \quad x = 233°$

مجموعة الحل = $\{53°, 233°\}$

مثال 26 حل المعادلة $\tan x = \sqrt{3}$

الحل :

$\tan x = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \tan \quad x = \tan 60^\circ$

$\Leftrightarrow \quad x = 60^\circ \quad$ or $\quad x = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$

مجموعة الحل = $\{60^\circ, 240\}$

مثال 27 حل المعادلة $\tan 4x + \cot x = 0$ حيث أن $0 < x < 90^\circ$

الحل :

$\tan 4x = -\cot x \quad \Rightarrow$

$\therefore$ either $\tan 4x = \tan (90^\circ + x) \Rightarrow$ (في الربع الثاني)

$4x = 90^\circ + x \Rightarrow$

$3x = 90^\circ \quad \Rightarrow$

$\therefore x = 30^\circ$

or $\tan 4x = \tan (270^\circ + x) \Rightarrow$ (في الربع الرابع)

$4x = 270^\circ + x \Rightarrow$

$3x = 270^\circ \Rightarrow$

$x = 90^\circ$ (تهمل)

مجموعة الحل = $\{30^\circ\}$

مثال 28 حل المعادلة :

$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

الحل : نحلل الطرف الايسر وكما يأتي :

$(\cos x + 2)(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow$

either $\cos x = -2$

يهمل لانه $-1 \leq \cos x \leq 1$

or $\cos x = 1/2$

ويكون $\cos x$ موجباً في الربعين الاول والرابع

أ) في الربع الاول :

$\cos x = \cos 60^\circ \quad \Rightarrow \quad x = 60^\circ$

ب) في الربع الرابع :

$\cos x = \cos (360^\circ - 60^\circ) \Rightarrow x = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

مجموعة الحل= $\{60^\circ, 300^\circ\}$

ثانياً : المعادلات المثلثية من الصورة

$$a \sin x + b \cos x = c$$

اي انها معادلة من الدرجة الاولى بالنسبة الى $(\sin x)$ ، $(\cos x)$

أ) المعادلات المثلثية من الصورة :

$$a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c \cos^2 x = d$$

اي انها معادلة من الدرجة الثانية في كل من $(\sin x)$ ، $(\cos x)$

ففي الحالة (الاولى) اذا كان احد المعاملات a,b,c يساوي صفراً فأن المعادلة تتحول الى معادلة بسيطة ويمكن حلها كما في الحالة (أولاً)

اما اذا كان كل من هذه المعاملات لا يساوي صفراً فيمكن توضيح حلها اذا كان $c^2 \le a^2+b^2$ وكما في المثال الآتي :

مثال 29 حل المعادلة :

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$$

الحل : لحل هذا النوع من المعادلات نتبع الآتي :

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\tan \Pi/3 \sin x + \cos x = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$((\sin \Pi/3) /(\cos \Pi/3)) \sin x + \cos x = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\sin \Pi/3 \sin x + \cos \Pi/3 \cos x = \sqrt{3} \cos \Pi/3$$

$$\cos (\Pi/3 - x) = \sqrt{3} / 2$$

يكون $\cos x$ موجباً في الربعين الاول والرابع

$$\therefore \text{ either } \quad \cos \left(\frac{\Pi}{3} - x \right) = \cos\left(\frac{\Pi}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\Pi}{3} - x = \frac{\Pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\Pi}{3} - \frac{\Pi}{6} = \frac{\Pi}{6}$$

$$\text{or} \quad \cos \left(\frac{\Pi}{3} - x \right) = \cos \left(-\frac{\Pi}{6}\right) \Rightarrow \frac{\Pi}{3} - x = -\frac{\Pi}{6} \qquad x = \frac{\Pi}{2}$$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \left\{ \frac{\Pi}{6} , \frac{\Pi}{2} \right\}$

اما الحالة (الثانية) فنعوض عن الدوال المثلثية للزاوية بدلالة جيب وجيب تمـــــام ضعف الزاوية فتكون :

$$a \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right) + b \left(\frac{\sin 2x}{2} \right) + c \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right) = d$$

مثال 30 حل المعادلة الآتية :

$$2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 3$$

الحل : حيث ان $0° \le x < 90°$

$$2\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)+\sqrt{3}\,(\sin x\cos x)+3\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)=3$$

$$2-2\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x+3+3\cos 2x=6$$

$$\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=1$$

$$\tan\frac{\Pi}{3}\sin 2x+\cos 2x=1$$

$$\left(\left(\sin\frac{\Pi}{3}\right)/\left(\cos\frac{\Pi}{3}\right)\right)\sin 2x+\cos 2x=1 \Rightarrow$$

$$\sin\frac{\Pi}{3}\sin 2x+\cos\frac{\Pi}{3}\cos 2x=\cos\frac{\Pi}{3} \quad \Rightarrow \cos\left(\frac{\Pi}{3}-2x\right)=\cos\frac{\Pi}{3} \quad \Rightarrow$$

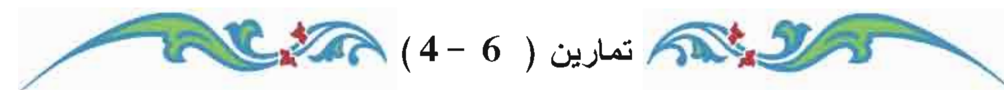
cos x موجبة أما الربع الأول أو الربع الرابع فأما

$$\therefore \cos\left(\frac{\Pi}{3}-2x\right)=\cos\frac{\Pi}{3} \Rightarrow \frac{\Pi}{3}-2x=\frac{\Pi}{3} \Rightarrow x=0$$

أو

$$\cos\left(\frac{\Pi}{3}-2x\right)=\cos\left(-\frac{\Pi}{3}\right) \quad \therefore \frac{\Pi}{3}-2x=-\frac{\Pi}{3} \Rightarrow 2x=2\frac{\Pi}{3} \Rightarrow x=\frac{\Pi}{3}$$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{0, \frac{\Pi}{3}\}$



تمارين (6 - 4)

حل المعادلات الآتية :

1. $\sin x = \sqrt{3}/2$
2. $\cos x = \sqrt{2}/2$
3. $\tan x = \sqrt{3}/3$
4. $\sin 2x = \sin\left(x+\frac{\Pi}{2}\right)$
5. $\cos 4x = \cos(x+\Pi)$
6. $\tan 4x - \cot x = 0$
7. $\tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0$
8. $\cos^2 x - \cos x = 0$
9. $\cos x = 2\sin^2(x/2)$
10. $\tan 2x = 3\tan x$
11. $\cos x = \sqrt{2}\sin^2 x$
12. $2\sin^2 x = \cos 2x(4\sin 2x - 1)$
13. $\cos^3 x = \sin^3 x$
14. $\sin x + \cos x = 1$

[11 - 4] رسم منحنيات الدوال المثلثية Graph of Trigonometric Functions

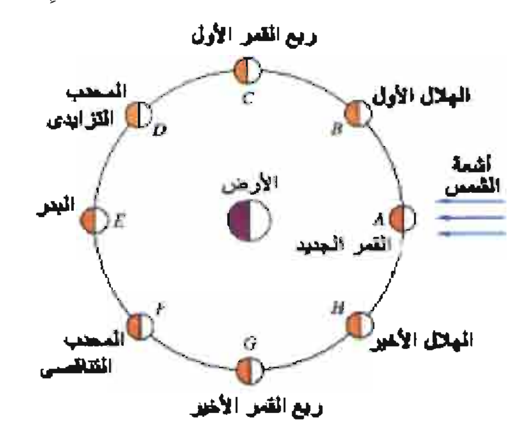
تمهيد:

كثير من الحوادث والظواهر الطبيعية تتكرر بشكل متماثل في فترات متساوية من الزمن، مثل:

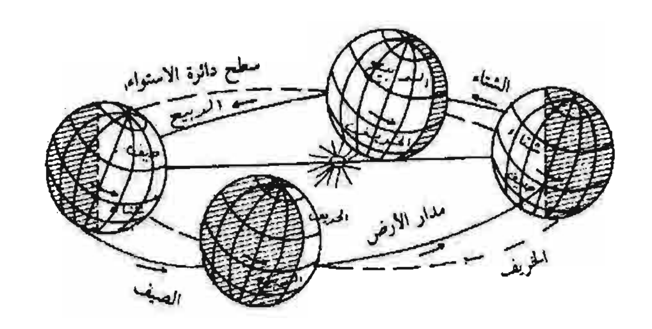
1. رؤية وجه من اوجه القمر من على سطح الارض، فنحن نراه:

هلالاً ، تربيعاً أول ، بدراً ، تربيعاً ثانياً ، محاق، .

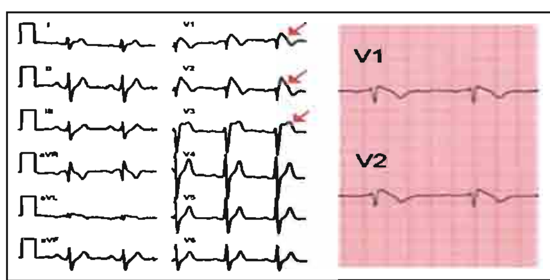
ثم يتكرر ذلك كل (29) يوماً و (12) ساعة و (44) دقيقة و (3) ثوانٍ.



2. دوران الارض حول الشمس يتكرر بصفة منتظمة كل فترة زمنية معلومة.



3. جميع حركات الموجات التي توصف بانها كهرومغناطيسية مثل موجات الضوء، موجات الراديو، كذلك الموجات التي يبثها الرادار عند عمله، جميعها موجات مستعرضة وهي تتكرر في فترات زمنية متساوية.





وان رسم الدوال المثلثية هو من النوع الذي يتكرر في دورات محدودة وذلك لان هذه الدوال هي دوالاً دورية.

اولاً: رسم منحني جيب الزاوية. $(y = \sin x)$

اذا تغير قياس الزاوية الموجهة بالوضع القياسي، تتغير قيمة الدالة الدائرية تبعاً لها. فمثلاً اذا تغير قياس الزاوية من $0°$ الى $360°$ (او من 0 الى 2Π) فاننا نحصل على قيم مختلفة لدالة الجيب لهذه الزاوية ضمن الفترة $[-1,1]$.

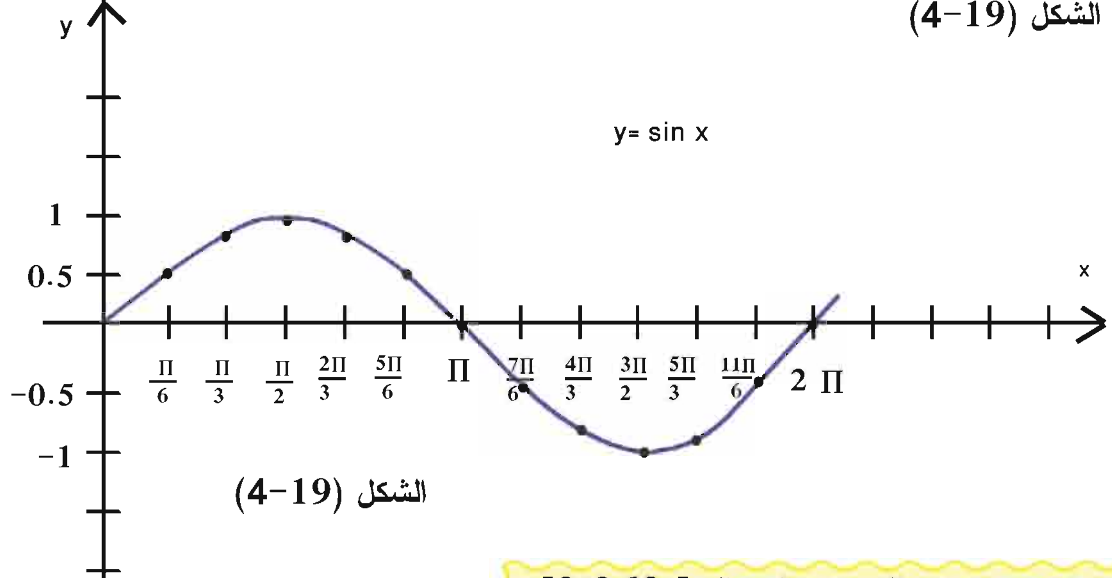
فاذا كانت y تساوي قيمة الجيب وكانت الزاوية هي x فان $y = \sin x$.

وللتمثيل البياني لدالة الجيب ننشيء جدولاً يبين قيم x والقيم المناظرة لها y.

كما في الجدول الآتي:

x	$0°$	$30°$ $\frac{\Pi}{6}$	$60°$ $\frac{\Pi}{3}$	$90°$ $\frac{\Pi}{2}$	$120°$ $\frac{2\Pi}{3}$	$150°$ $\frac{5\Pi}{6}$	$180°$ Π	$210°$ $\frac{7\Pi}{6}$	$240°$ $\frac{4\Pi}{3}$	$270°$ $\frac{3\Pi}{2}$	$300°$ $\frac{5\Pi}{3}$	$330°$ $\frac{11\Pi}{6}$	$360°$ 2Π
y=sinx	0	0.5	0.86	1	0.86	0.5	0	- 0.5	- 0.86	-1	- 0.86	- 0.5	0

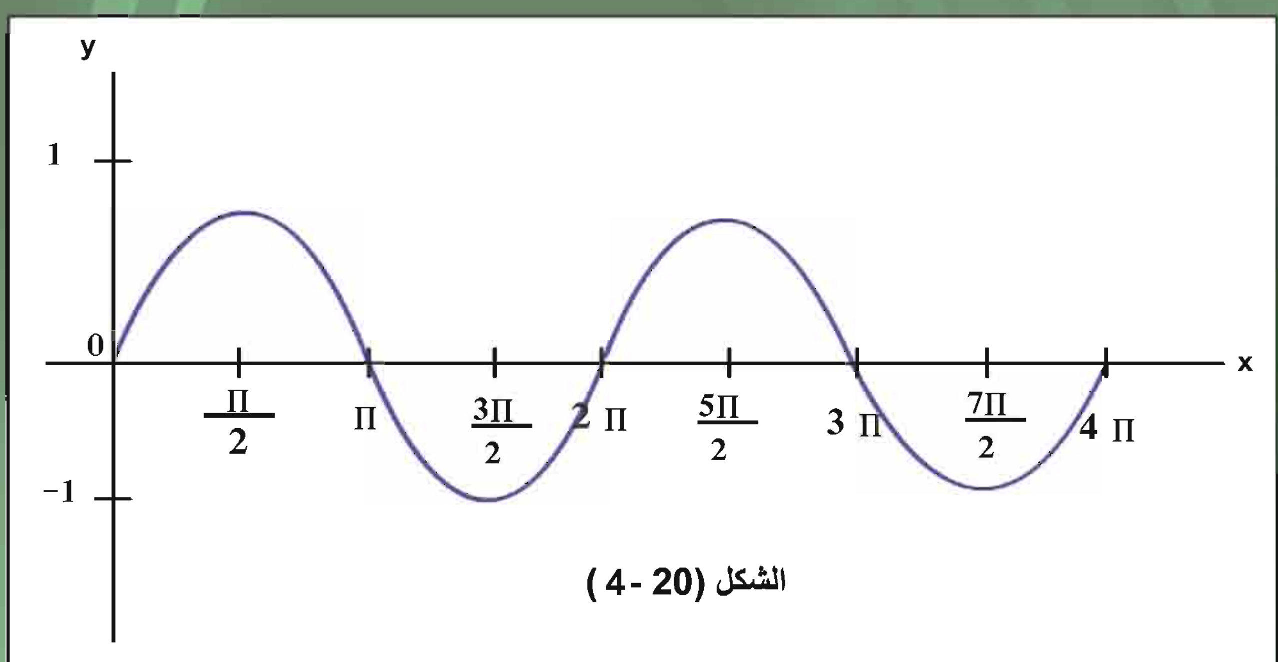
نحدد الازواج التي نحصل عليها من x , y ثم نرسم على ورقة المربعات منحني الجيب ويكون كما في الشكل (4-19)



الشكل (4-19)

خواص منحني الجيب. المجال $[0,360°]$:

1. يقطع منحني الجيب محور السينات عند $x = 0°\ , x = 180°\ , x = 360°$
2. اكبر قيمة للجيب عند $x = 90°$ وتساوي 1
3. اصغر قيمة للجيب عند $x = 270°$ وتساوي -1.
4. عندما $x \in (0\ , 180°)$ تكون قيمة $\sin x$ موجبة ويكون المنحني واقعاً اعلى محور السينات.
5. عندما $x \in (180°\ , 360°)$ يكون قيمة $\sin x$ سالبة ويكون المنحني واقعاً اسفل محور السينات.
6. لو رسمنا $y = \sin x$ في الفترة $[2\Pi, 4\Pi]$ نجد ان بيان sin كرر نفسه.لاحظ الشكل(4 -20)



الشكل (20 - 4)

مثل هذه الدالة نطلق عليها دالة دورية.

والفترة التي كرر فيها المنحني نفسه (2Π) تسمى دورة الدالة.

ويسمى العدد: $\frac{1}{\text{دورة الدالة}}$ بالتردد ، ويسمى العدد = $\frac{\text{اكبر قيمة - اقل قيمة}}{2}$ سعة الدالة.

أي أن: دورة الدالة $y = \sin x$ هي 2Π

وان التردد $= 1/2\Pi$

وان السعة $= \frac{1-(-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

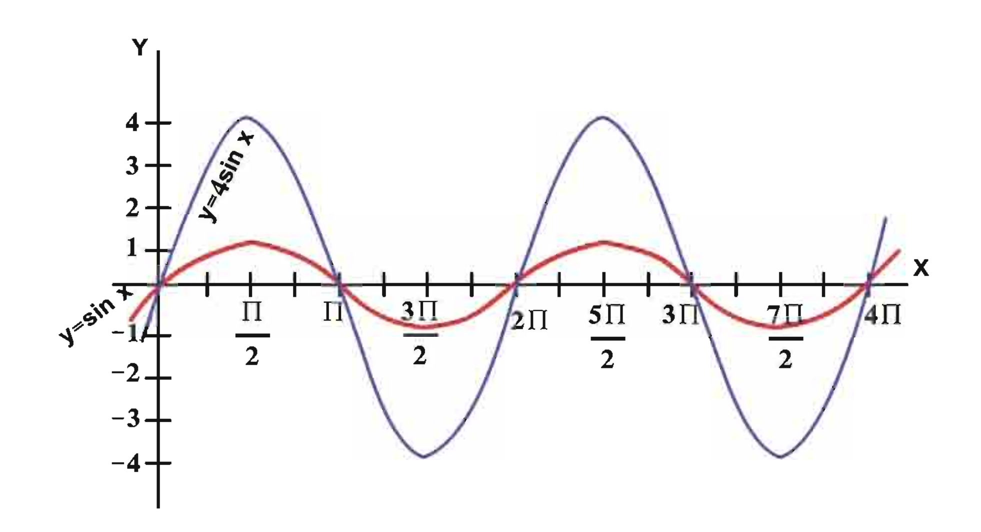
مثال:

ارسم بيان الدالة $y = 4 \sin x$ ومن الرسم جد:

أ. الدورة ب. التردد جـ. السعة

الحل: الجدول الآتي يوضح

x	0	$\frac{\Pi}{2}$	Π	$\frac{3\Pi}{2}$	2Π	$\frac{5\Pi}{2}$	3Π	$\frac{7\Pi}{2}$	4Π
sin x	0	1	0	−1	0	1	0	−1	0
4sin x	0	4	0	−4	0	4	0	−4	0



دورة الدالة $y = 4 \sin x$ هي 2Π

التردد $= 1/2\Pi$

السعة $= ((4 - (-4))/2 = 4$

نشاط:

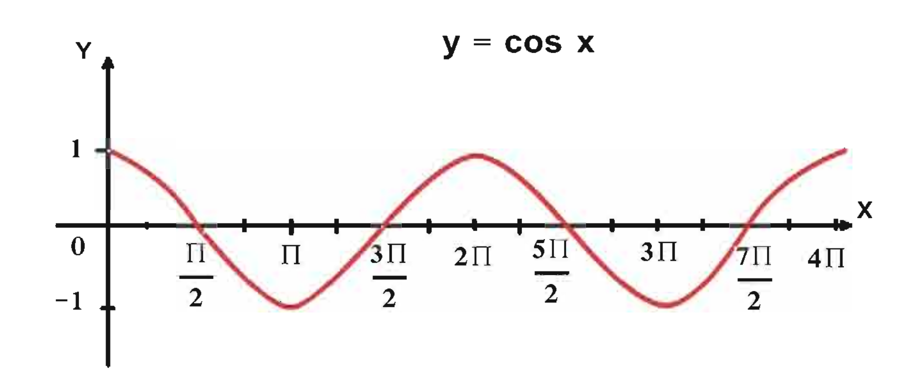
أ. ارسم بيان الدالة $y = \sin 2x$ وعين السعة والتردد والدورة.

ب. ارسم بيان الدالة $y = \sin 3x$ وعين السعة والتردد والدورة.

ثانياً: رسم بيان الدالة $y = \cos x$

الحل: نكون جدولاً يبين العلاقة بين x , $\cos x$ كما يأتي:

x	0	$\frac{\Pi}{2}$	Π	$\frac{3\Pi}{2}$	2Π	$\frac{5\Pi}{2}$	3Π	$\frac{7\Pi}{2}$	4Π
cos x	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1



لو نظرنا الى البيان في الفترة [0 , 2Π] وفي الفترة [2Π , 4Π] نجدهما متشابهان تماماً في الفترتين أي أن بيان cos يكرر نفسه كل فترة طولها 2Π وعلى ذلك فان الدالة $y = \cos x$ دورية.

دورة الدالة $y = \cos x$ هي 2Π

التردد = 1/2 Π

السعة = 1

نشاط:

1. ارسم بيان الدالة $y = \cos \frac{1}{2} x$ في الفترة [0 , 4 Π] ومن الرسم عين دورة الدالة وترددها وسعتها.

2. ارسم بيان الدالة $y = 2 \cos 4x$ في الفترة [0 , Π]
ومن الرسم عين كلاً من دورة الدالة وترددها وسعتها.

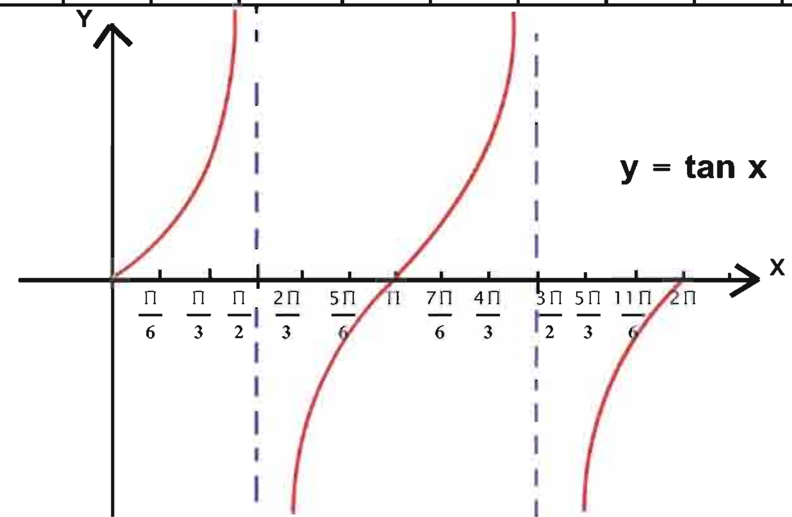
خواص منحني الجيب التمام $(y = \cos x)$

1. يقطع محور السينات عند $x=3\frac{\Pi}{2}$, $x=\frac{\Pi}{2}$
2. اكبر قيمة لجيب التمام عند x=0 , x=2Π تساوي 1
3. اصغر قيمة لجيب التمام عند x = Π تساوي −1
4. عندما تكون x من 0 الى $\frac{\Pi}{2}$ يكون منحني الجيب التمام موجباً، اذ يكون اعلى محور السينات وعندما تأخذ x القيم من $\frac{\Pi}{2}$ الى $3\frac{\Pi}{2}$ يكون منحني الجيب تمام سالباً، اذ يكون اسفل محور السينات. وعندما تأخذ x القيم من $3\frac{\Pi}{2}$ الى 2Π يكون منحني الجيب التمام موجباً اذ يكون اعلى محور السينات.

ثالثاً: رسم منحني الظل: $(y = \tan x)$

نكون جدولاً يبين العلاقة بين x , $y = \tan x$

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y=tan x	0	0.6	1.7	غير معرفة	-1.7	-0.6	0	0.6	1.7	غير معرفة	-1.7	-0.6	0



الدالة $y = \tan x$ دورية

ودورتها = Π

التردد = $1/\Pi$

المنحني ليس محدود لا من اعلى ولا من اسفل لذا ليس له سعة

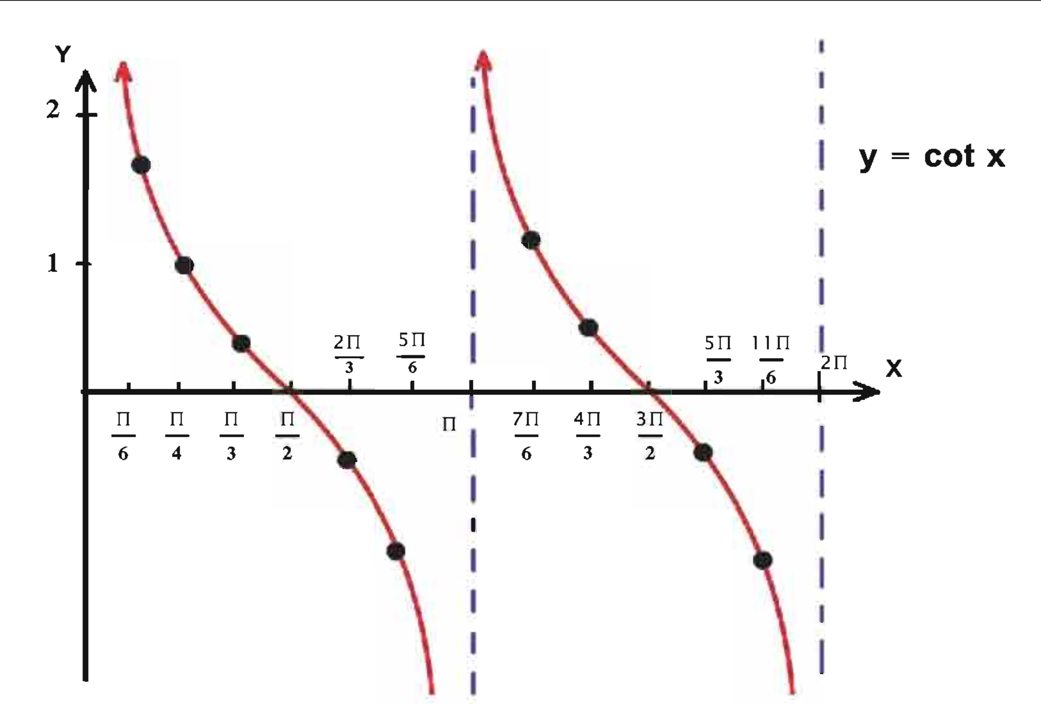
خواص منحني الظل: $y = \tan x$

1. يقطع المحور السيني عند x تساوي: $0°$, $180°$, $360°$
2. المنحني غير متصل كما في منحني الجيب ومنحني الجيب تمام.
3. عندما تكون x بين $0°$, $90°$ يكون الظل موجباً، وكلما اقتربنا من $x = 90°$ نجد قيمة الظل تزداد ازدياداً كبيراً
4. عندما تكون بين $90°$, $180°$ يكون الظل سالباً وعندما تقع x بين $180°$ ، $270°$ يكون الظل موجباً
5. يكون سالباً عندما تقع x مابين $270°$, $360°$

رابعاً: رسم منحني ظل التمام: y = cot x

نكون جدولاً يبين العلاقة بين cot x, x وكما يأتي:

x	0	$\frac{\Pi}{6}$	$\frac{\Pi}{4}$	$\frac{\Pi}{3}$	$\frac{\Pi}{2}$	$\frac{2\Pi}{3}$	$\frac{5\Pi}{6}$	Π	$\frac{7\Pi}{6}$	$\frac{4\Pi}{3}$	$\frac{3\Pi}{2}$	$\frac{5\Pi}{3}$	$\frac{11\Pi}{6}$	2Π
y=cotx	غير معرفة	1.7	1	0.6	0	-0.6	-1.7	غير معرفة	1.7	0.6	0	-0.6	-1.7	غير معرفة



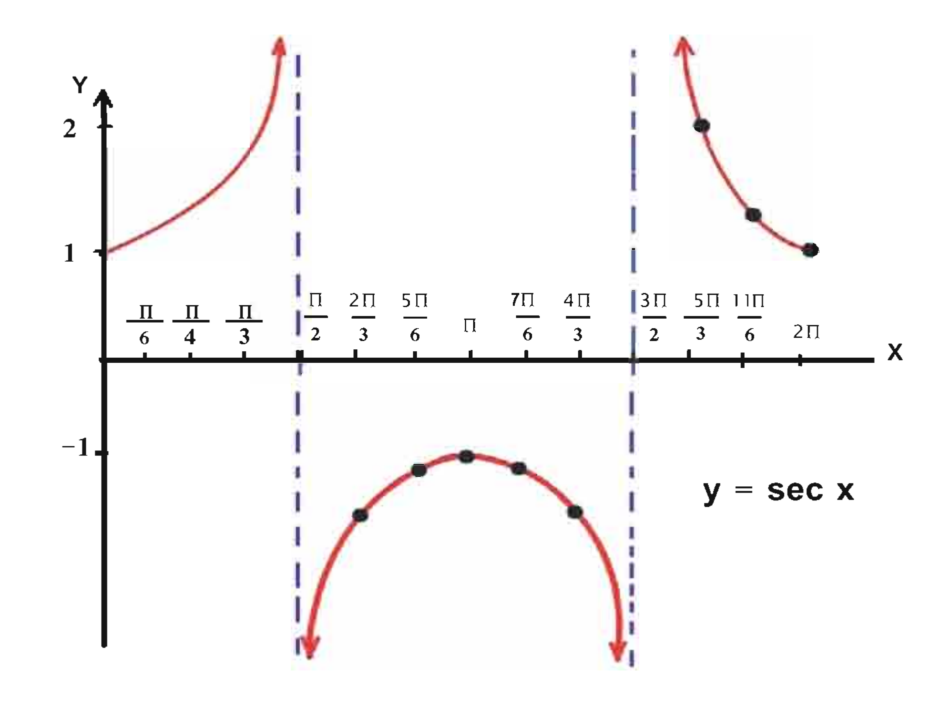
خواص منحني ظل التمام:

1. يقطع محور السينات عند $x = \frac{\Pi}{2}$, $x=3\frac{\Pi}{2}$
2. المنحني غير متصل.
3. عندما تكون x بين 0 و $\frac{\Pi}{2}$ نجد ان ظل التمام موجب، وعندما تكون x ما بين $\frac{\Pi}{2}$ و Π نجد انه سالب وعندما تكون x ما بين Π و $3\frac{\Pi}{2}$ يصبح موجباً، وعندما تكون x ما بين $3\frac{\Pi}{2}$ و 2Π يكون سالباً.

خامساً: رسم منحني قاطع الزاوية: y = sec x

نكوّن جدولاً يبين العلاقة بين x , y = sec x كما يأتي:

x	0	$\frac{\Pi}{6}$	$\frac{\Pi}{4}$	$\frac{\Pi}{3}$	$\frac{\Pi}{2}$	$\frac{2\Pi}{3}$	$\frac{5\Pi}{6}$	Π	$\frac{7\Pi}{6}$	$\frac{4\Pi}{3}$	$\frac{3\Pi}{2}$	$\frac{5\Pi}{3}$	$\frac{11\Pi}{6}$	2Π
y=secx	1	1.2	1.4	2	غير معرفة	-2	-1.2	-1	-1.2	-2	غير معرفة	2	1.2	1



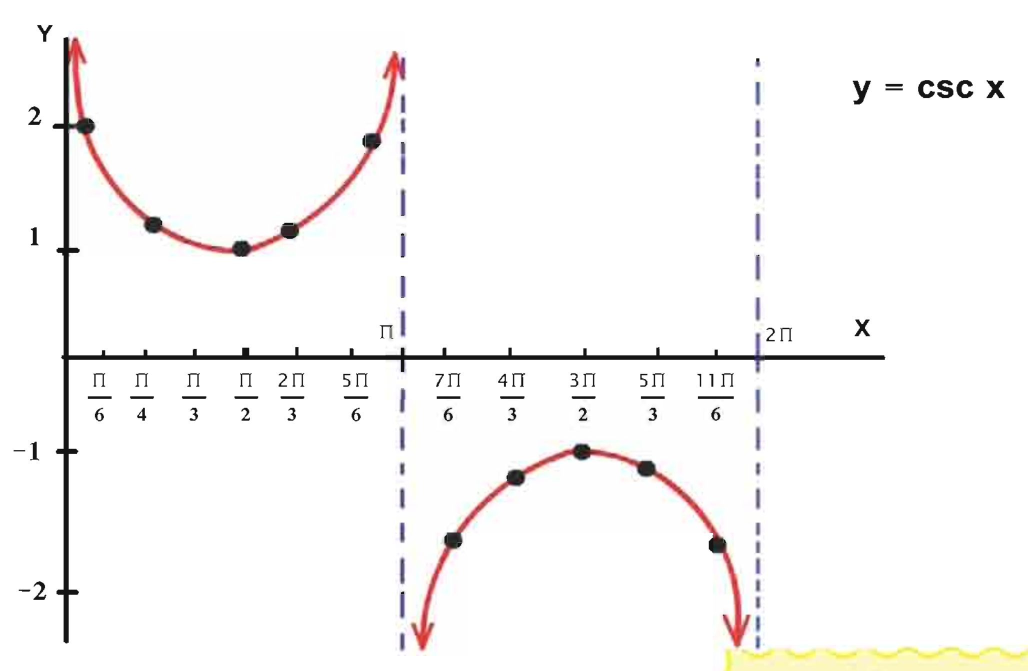
خواص منحني القاطع:

1. لا يقطع منحني القاطع محور السينات على الاطلاق.
2. عندما x ما بين 0 و $\Pi/2$ يكون المنحني موجباً.
3. عندما x ما بين $\Pi/2$ و $3\Pi/2$ يكون المنحني سالباً.
4. عندما x ما بين $3\Pi/2$ و2Π يكون المنحني موجباً.
5. المنحني غير متصل.
6. المنحني غير محدود لا من الاعلى ولا من الاسفل لذا ليس له سعة

سادساً: رسم منحني قاطع التمام: $y = \csc x$

نكوّن جدولاً يبين العلاقة بين x , $y = \csc x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y=cscx	غير معرفة	2	1.4	1.2	1	1.2	2	غير معرفة	-2	-1.2	-1	-1.2	-2	غير معرفة



خواص منحني قاطع التمام

1. المنحني لا يقطع محور السينات.
2. عندما X ما بين 0 الى Π يكون المنحني موجبا اعلى محور السينات.
3. عندما X ما بين Π الى 2Π يكون المنحني سالبا اسفل محور السينات.
4. المنحني غير متصل.
5. دورة المنحني 2Π والتردد Π 1\2 .
6. المنحني غير محدود لا من الاعلى ولا من الاسفل لذا ليس له سعة.




تمارين(8 -4)

1. ارسم بيان كل من الدوال الاتية. ومن الرسم استنتج كلا من دورة الدالة وترددها وسعتها:

1. $y = \sin 3x$ on $[0, 4\Pi/3]$
2. $y = -\sin x$ on $[0, 2\Pi]$
3. $y = 3\sin 2x$ on $[0, 2\Pi]$
4. $y = \cos 2x$ on $[-\Pi, 2\Pi]$
5. $y = -2\cos x$ on $[-2\Pi, 2\Pi]$
6. $y = 2\cos 3x$ on $[0, 3\Pi]$
7. $y = 2\tan x$ on $[-\Pi/2, 3\Pi/2]$
8. $y = \tan 2x$ on $[0, \Pi]$

2. اختبار موضوعي

1. ضع اشارة + او – في المستطيلات التالية لتحصل على عبارة صحيحة :

a. $\cos(20^\circ + 50^\circ) = \cos 20^\circ \cos 50^\circ \;\square\; \sin 20^\circ \sin 50^\circ$

b. $\tan(3A - 2B) = \tan 3A \;\square\; \tan 2B \;/\; 1 \;\square\; \tan 3A \tan 2B$

c. $\sin(80^\circ \;\square\; 10^\circ) = \sin 80 \cos 10^\circ - \cos 80^\circ \sin 10^\circ$

2. اكمل ما يأتي لتحصل على عبارة صحيحة

a. $\sin(40^\circ + 180^\circ) = \sin 40^\circ \;\square\; + \;\square\; \sin 180^\circ$

b. $2\sin \Pi/3 \cos \Pi/3 = \sin \;\square$

c. $\dfrac{2\tan x/3}{1 - \tan^2 x/3} = \;\square$

d. $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos \;\square$

3. عيّن العبارات الصحيحة والعبارات الخاطئة فيما يأتي:

a. $\sin 6x = 2\sin 3x$

b. $\sin 15 \cos 15^\circ = \sin 30^\circ$

c. $\cos 80^\circ = \cos^2 40^\circ - \sin^2 40^\circ$

d. مجموعة حل المعادلة $2\cos x + 3 = 0$ هي $\varnothing$

4. اختر من القائمة A ما يناسبها من القائمة B

القائمة A	القائمة B
1. $\cos4A\cos A - \sin4A\sin A =$	a. $\sin5A$
2. $\sin A\cos4A - \sin4A\cos A =$	b. $\cos5A$
3. $\sin4A\cos A + \cos4A\sin A =$	c. $\sin3A$
	d. $\sin(-3A)$

5. اختبار مقالي

1. اذا كان $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ وكانت $\cos x = \frac{2}{3}$ فاوجد قيمة كل من : $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$

2. اذا كان $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ وكانت $\cos x = \frac{3}{5}$ فاوجد قيمة كل من : $\cos2x$, $\sin2x$, $\tan2x$, $\sin(x/2)$, $\cos(x/2)$.

3. بدون استخدام الحاسبة اوجد قيمة:

a. $\sin\pi/8 \cos\pi/8$

b. $\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}$

4. اثبت صحة كل من المتطابقات الاتية

a. $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$

b. $\tan(x/2) = (1-\cos x) / \sin x$



الفصل الخامس

Chapter 5

Limit and Continuity الغاية والاستمرارية

[5-1] جوار العدد

[5-2] غاية الدالة

[5-3] غاية الدوال الدائرية

[5-4] الاستمرارية

المصطلح	الرمز أو العلاقة الرياضية
غاية الدالة f(x) عندما $x \rightarrow a$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
إستمرارية f(x) عند $x = b$	$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b)$

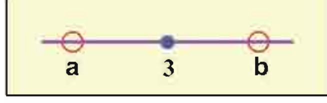
الفصل الخامس

الغاية والاستمرارية

غاية الدالة واستمراريتها limit and continuity

تمهيد :

اذا نظرنا في الشكل (1-5) نلاحظ نقطتين الاولى a تقع على يسار العدد 3 والاخرى b تقع على يمين العدد 3



شكل (1-5)

فإذا فرضنا ان a تأخذ قيماً متزايدة

$$2.9\ ,\ 2.99\ \ldots\ldots\ ,\ 2.999,\ \ldots\ldots$$

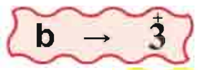
تتقارب باستمرار نحو العدد 3 من اليسار ونرمز لذلك بالرمز a نقول ان

$$a \to 3^-$$

واذا اعطينا b قيماً متناقصة مثل :

$$3.1\ ،\ 3.01\ ،\ 3.001\ \ldots\ldots\ 3.000001\ \ldots\ldots\ldots$$

نقول ان b تتقارب باستمرار نحو العدد 3 من اليمين ونرمز لذلك بالرمز



$$b \to 3^+$$

[1-5] جوار العدد neighbourhood

على ضوء ما سبق يمكنك ان تتفهم التعريف الآتي :

[1-

اذا كان a عدداً (نقطة) وكان $\in$ (تقرأ إبسلون) عدداً موجباً تسمى الفترة

1 - $(a - \in , a + \in)$ جواراً للعدد a (الجوار هنا يحوي a)

2 - $]a - \in , a]$ جواراً ايسر للعدد a (الجوار هنا يحوي a)

3 - $[a , a + \in)$ جواراً ايمن للعدد a (الجوار هنا يحوي a)

ويرمز لمجموعة الجوار بالرمز N

فمثلا

اذا كان $a = 1\ ,\ \in = 1/2$ فان

.1 $\left(1 - \frac{1}{2} , 1 + \frac{1}{2}\right)$ جواراً للعدد 1

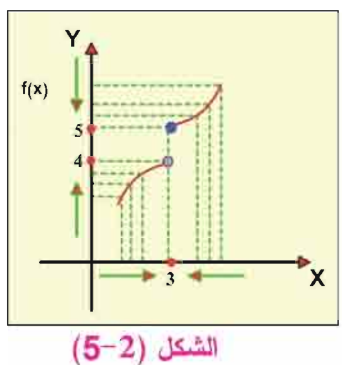
2. $[1 , 1-\frac{1}{2})$ جواراً ايسر للعدد 1

3. $(1+\frac{1}{2} , 1]$ جواراً ايمن للعدد 1

[5-2] غاية الدالة (limit of a function)

تمهيد توضيحي :

سنعطي فيما يأتي توضيحاً هندسياً اي باستخدام الرسم فقط للتعريف بمفهوم الغاية إذ سنكتفي بأدراك أولي للتعريف عن طريق الحواس ثم ننتقل بعد ذلك الى التعريف المحدد ففي الشكل (2-5)



الشكل (2-5)

نلاحظ ان هناك بياناً للدالة f (منفصلة هندسياً) عندما x=3 كما يمكنك ان تلاحظ ان $y = f(x)$ تأخذ قيماً متقاربة من 4 وذلك عندما تتقارب x من 3 من اليسار وكلما اردنا ان نجعل f(x) اكثر قرباً الى 4 فانه يمكننا ذلك عن طريق اعطاء x قيماً اكثر قرباً الى 3 من اليسار

وفي هذه الحالة تقول :

أن $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 4$

وتقرأ غاية الدالة عند 3 من اليسار تساوي 4

لاحظ :

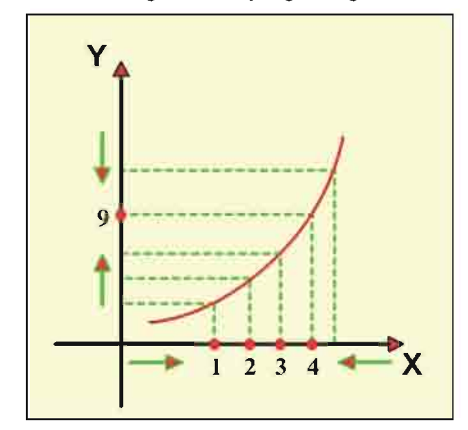
اننا لم نتعرض لذكر ما اذا كانت الدالة معرفة او ليست معرفة عند $x = 3$

كما يمكنك ان تلاحظ f(x) تتقارب من 5 كلما اقتربت x الى 3 من جهة اليمين وفي مثل هذه الحالة نقول ايضاً :

غاية الدالة تساوي 5 عندما $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 5$

تتقارب x الى 3 من اليمين وتقرا غاية الدالة عند 3 من اليمين تساوي 5

لاحظ اننا لم نذكر فيما اذا كانت الدالة معرفة او ليست معرفة عند $x = 3$



الشكل (3-5)

ملاحظة :

الدالة تتقارب من 9 عندما تتقارب x من 4 من اليسار واليمين او

f(x) تتقارب من 9 عندما تتقارب xمن 4 وهذا يعني

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x) = 9$$

وفي هذه الحالة عندما تتساوى النهايتان لدالة مثل f عند نقطة مثل 4 من اليسار واليمين

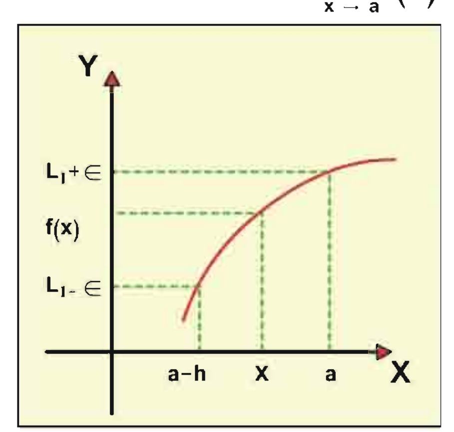
تقول ان للدالة f غاية عند 4 ونعبر عند ذلك بالصورة الرمزية .

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 9$$

الغاية عند $x \to a$

اعتماداً على ما عرضناه سابقاً في تقديم مفهوم الغاية باستخدام الرسوم التوضيحية كما في

الشكل (4-6) وقلنا بأن $\lim_{x \to a} f(x) = L$



شكل (4-5)

تفهم من هذا عموماً انه :

بأمكاننا دوماً ان نجعل f(x) قريبة من L بقدر ما نشاء وذلك بأعطاء x قيماً قريبة من a من

اليسار بصورة مناسبة .

فاذا اردنا اعطاء صيغة رياضية كهذا الفهم العام فهذا سيكون على النحو الاتي :

1. اذا حددنا اي معيار للقرب من L مثل $0 < \in$

2. يمكننا تحديد جوار ايسر N_1 للعدد a مثلاً $(a-h, a)$

حيث h عدد حقيقي موجب بحيث $h \leq \in$:

عندما

$x \in N / \{a\} \Rightarrow$

f(x) تكون قريبة من L حسب المعيار ∈

$x \in N / \{a\} \Rightarrow |f(x) - L| < \in$

ومنه نتوصل الى التعريف الاتي :

تعريف [1-2-5]

اذا قلنا $\lim_{x \to a} f(x) = L$ فهذا يعني $\forall \in > 0$

يوجد جوار ايسر N_1 للنقطة (العدد) a

$x \in N_1 / \{a\} \Rightarrow |f(x) - L| < \in$

يمكنك ان تلاحظ بأنه لأثبات $\lim_{x \to 2} f(x) = L$ لابد من ايجاد الخطوات الآتية :

1. حدد مجال الدالة

2. تأكد في ضوء تحديدك لمجال الدالة فيما اذا كانت f معرفة من يسار (a) بمعنى معرف على الفترة :

$N / \{a\} = (a-h, a)$

لاحظ اننا لا نشترط ان الدالة معرفة عند a

3. اختر $\in > 0$

4. ضع $|f(x) - L| < \in$ ثم باشر بحل المتباينة السابقة فاذا استطعت ان تحدد جوراً ايسر مثل N للعدد a بحيث :

عندما تكون :

$x \in N / \{a\}$

فأن $|f(x) - L| < \in$

تكون صحيحة وبذلك تكون قد اثبت صحة المطلوب منك .



ليكن $f(x) = 2x - 1$ اثبت ان $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$

الحل :

باستخدام التعريف

1. مجال $f = R$
2. بما ان f معرفة على R فهي معرفة في يسار 2 اي ان f معرفة على اية فترة مثل $(2-h , 2)$
3. لتكن $\in > 0$
4. $|f(x) - 3| < \in$

$$|2x-1-3| < \in$$

$$|2x-4| < \in$$

$$-\in < 2x-4 < \in$$

$$4 - \in < 2x < 4+\in$$

$$2-\frac{\in}{2} < x < 2+\frac{\in}{2}$$

وهذا يعني اذا كانت :

$$x \in (2 - \frac{\in}{2} , 2 + \frac{\in}{2}) \Rightarrow |f(x) - 3| < \in$$

تكون صحيحة :

فاذا اخترنا $(2-\in , 2) = (2 - \frac{\in}{2} - \frac{\in}{2} , 2 + \frac{\in}{2} - \frac{\in}{2})$

فنجد ان

اذا كانت $x \in N/\{2\} \Rightarrow |f(x) - 3| < \in$ تكون صحيحة

$\therefore$ الغاية المعطاة صحيحة

وبنفس الطريقة غاية الدالة عندما $x \to a$ من اليمين

[5-2-2] تعريف

اذا قلنا بأن $\lim_{x \to a} f(x) = L$ فهنا يعني $\forall \in > 0$

يوجد جوار N للنقطة a

$$x \in N/\{a\} \Rightarrow |f(x) - L| < \in$$

من الواضح بأنه اذا كانت :

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ فان

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

وهذا يعني ان :

1. وجود الغاية عند النقطة a يؤدي الى وجود غاية من اليسار وغاية من اليمين عند a كلتاهما متساويتان .
2. اذا وجدت غاية عند النقطة a من اليمين وغاية عند a من اليسار وكان : $L_1 \neq L_2$ فان الغاية عند a ليست موجودة أو لا تكون معرفة .

[5-2-3] بعض مبرهنات الغاية

فيما يأتي مجموعة من المبرهنات التي تساعد في حساب الغاية ويمكن اثبات صحتها باستخدام تعريف الغاية وكما في الامثلة السابقة ، ولكننا سنكتفي بذكر منطوق هذه المبرهنات ونستخدمها في حل امثلة واسئلة للغاية في هذه المرحلة من الدارسة .

مبرهنة (1)

اذا كان N جوار للعدد a وكانت الدالة معرفة $\forall x \in N/\{a\}$

وكانت $f(x) = C$ حيث $C \in R$ ، ثابت فان

$$\lim_{x \to a} f(x) = C$$



$$\lim_{x \to 3} \sqrt{5} = \sqrt{5} \quad , \quad \lim_{x \to -1} \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

مبرهنة (2)

اذا كان N جوار للعدد a وكانت الدالة $f(x) = x$ فان $\lim\limits_{x \to a} x = a$



$$\lim_{x \to 2} x = 2 \quad , \quad \lim_{x \to 3} x = 3$$

مبرهنة (3)

اذا كانت $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ موجودة ، $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ موجودة

فأن

- $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to a} f(x)]^n$
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \mp g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \mp \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} [c\, f(x)] = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) / g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) / \lim\limits_{x \to a} g(x) \;,\; [\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0]$

أمثلة

مثال 1

$$\lim_{x \to 3} (x+2) = \lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 2$$
$$= 3+2 = 5$$



a. $\lim\limits_{x \to a} x^2 = [\lim\limits_{x \to a} x]^2 = a^2$

b. $\lim\limits_{x \to 2} (x+3)^3 = [\lim\limits_{x \to 2} (x+3)]^3$

$= [\lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 3]^3$

$= [2+3]^3$

$= 125$



$$\lim_{x\to -1}(x^2+3x) = \lim_{x\to -1}x^2 + \lim_{x\to -1}3x$$
$$= (-1)^2+(3(-1))$$
$$= 1-3 = -2$$



$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2-4}{x-1}$$

$$= \frac{\lim_{x\to -2}(2x^2-4)}{\lim_{x\to -2}(x-1)}$$

$$\frac{2(-2)^2-4}{-2-1} = \frac{8-4}{-3} = \frac{-4}{3}$$



لتكن $f(x) = |x-1| / x-1 \ , \ x \neq 1$ جد ان امكن .

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} x-1 / x-1 = 1 & , \ x > 1 \\ -(x-1) / x-1 = -1 & , \ x < 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1 = L_1 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -1 = -1 = L_2 \end{array}\right\}$$

$\therefore \ L_1 \neq L_2 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

مثال 6

لتكن

$$f(x) = \begin{cases} x^2+4 & , \quad x \geq 1 \\ 5x & , \quad x < 1 \end{cases}$$

جد .

1. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ 2. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

الحل :

1. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2+4) = 4+4 = 8$

2. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} (x^2+4) = 1+4 = 5 = L_1 \\ \lim\limits_{x \to 1} (5x) = 5 \times 1 = 5 = L_2 \end{cases}$

$\therefore L_1 = L_2 \iff \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$ الغاية موجودة



جد :

$$\lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}$$

$$= \lim_{x \to a} (x^2 + ax + a^2)$$

$$= a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$



جد :

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(x-a)}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{(x-a)} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x\to a} 1 / \sqrt{x}+\sqrt{a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

مثال 9

لتكن

$$f(x) = \begin{cases} bx^2+3 & , x \le 2 \quad \text{اذا كانت} \\ c-2x & , x > 2 \quad \text{اذا كانت} \end{cases}$$

اذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 11$ جد قيمة $b , c \in R$

الحل :

$\lim_{x\to 2} f(x)$ موجودة

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 11$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (c-2x) = c-4 \Rightarrow c-4 = 11 \Rightarrow c = 15$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (bx^2+3) = 4b+3 \Rightarrow 4b+3 = 11 \Rightarrow b = 2$$

[5-3] غاية الدوال الدائرية limit of circular function

لقد تعلمت ان الدوال الكثيرة الحدود مستمرة عند اية نقطة من نقاط مجالها في هذا البند سنتناول دراسة غايات ومشتقات الدوال الدائرية ونبدأ بايجاد

$$\lim_{x\to 0} \sin(x\,/\,x)$$

مبرهنة (1) :

$\lim_{x\to 0} \sin(x\,/\,x) = 1$ حيث x بالقياس الدائري

البرهان :

$cb < cd$ طول القوس $< dh$

$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$

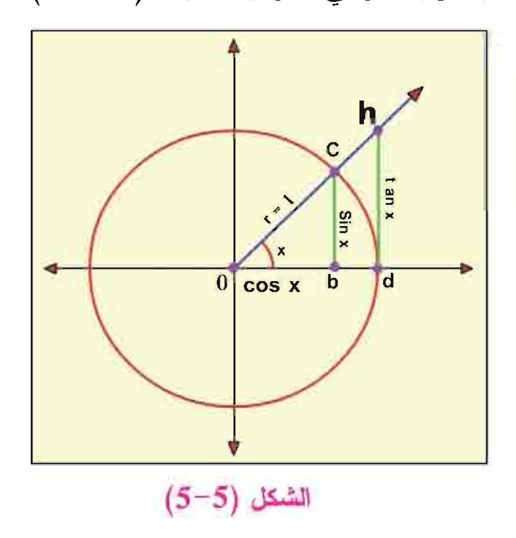
$\Rightarrow 1/\sin x > 1/x > \cos x\,/\,\sin x$ بضرب طرفي التراجحة بـــ (sin x)

$\Rightarrow 1 > \sin(x\,/\,x) > \cos x$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} 1 > \lim_{x\to 0} \sin(x\,/\,x) > \lim_{x\to 0} \cos x$

$\Rightarrow 1 > \lim_{x\to 0} \sin(x\,/\,x) > 1$

$\therefore \lim_{x\to 0} \sin(x\,/\,x) = 1$



الشكل (5-5)

مبرهنات غايات الدوال الدائرية

1. $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$
2. $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$
3. $\lim_{x\to 0} \tan x = 0$
4. $\lim_{x\to 0} \sin x/x = 1$
5. $\lim_{x\to 0} \sin ax/\,ax = 1$
6. $\lim_{x\to 0} \tan a\,x\,/\,ax = 1$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$



جد :

$$\lim_{x\to 0} \sin 3x / 4x$$

الحل :

$$= 1/4 \lim_{x\to 0} \sin 3x / x$$

$$= 3 / 4 \lim_{x\to 0} \sin 3x / 3x = 3/4 \times 1 = 3/4$$



جد :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 4x}{x \tan 2x}$$

الحل :

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin^2 4x}{x^2}}{\frac{x \tan 2x}{x^2}}$$

$$= \frac{4 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x}}{2 \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{2x}}$$

$$= \frac{4 \times 1 \times 4 \times 1}{2 \times 1} = 8$$



مثال 3

جد :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 4x + \tan 3x}{\sin 5x}$$

الحل :

بقسمة البسط والمقام على (x)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\tan 4x}{x} + \frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}}$$

$$= \frac{4 \lim_{x\to 0} \frac{\tan 4x}{4x} + 3 \lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{3x}}{5 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x}}$$

$$= \frac{(4\times 1 + 3\times 1)}{5\times 1} = \frac{4+3}{5} = \frac{7}{5}$$

مثال 4

$$\lim_{x\to 0} (1-\sqrt{\cos 2x})/x^2$$

الحل :

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2} \right) \times \left(\frac{1+\sqrt{\cos 2x}}{1+\sqrt{\cos 2x}} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1- \cos 2x)}{x^2 (1+\sqrt{\cos 2x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2 (1+\sqrt{\cos 2x})}$$

$$= 2 \frac{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}{\lim_{x\to 0} (1+\sqrt{\cos 2x})} = 2 \frac{1 \times 1}{1+1} = 1$$



تمارين (1-5)



.1 جد الغاية لكل مما يأتي:

a. $\lim_{x \to 3} \frac{(x^2 - x - 6)}{(x - 3)}$

b. $\lim_{x \to 1} (3x - 4)$

c. $\lim_{x \to 1} \frac{(x^3 - 1)}{(2x - 2)}$

d. $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x+5} - 3}$, $\{x: x \geq -5\}/\{4\}$

e. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

.2 اذا كان $f: R \to R$:

$f(x) = |x-1|$ حيث $\lim_{x \to 1} f(x)$ جد

.3 $f: R \to R$:

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & \text{اذا كانت } x > -1 \\ x^2 + 3 & \text{اذا كانت } x < -1 \\ 4 & \text{اذا كانت } x = -1 \end{cases}$$

أ. ارسم المخطط البياني لهذه الدالة

ب. هل للدالة غاية عند -1 بين ذلك ؟

جـ. جد $\lim_{x \to \sqrt{2}} f(x)$

.4

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{اذا كانت } x > -1 \\ 6 & x = -1 \\ 4x + b & \text{اذا كانت } x < -1 \end{cases}$$

اذا كانت $\lim_{x \to -1} f(x) = 3$ جد قيمة $a, b \in R$

5. اذا كان $g(x) = 3x^2 + 2x - 3$

$f(x) = x^2 + 6$

جد $\lim_{x\to 0}(g/f)(x)$

$\lim_{x\to 0}(g \cdot f)(x)$

6. جد الغاية لكل مما يأتي :

a. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x^2}{\sin^2 x}$

b. $\lim_{x\to 0}[\sin 2x + \frac{\tan 4x}{6x}]$

c. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

d. $\lim_{x\to 0}[\frac{3x}{\sin 2x} + \frac{1-\cos 6x}{\sin^2 x}]$

[5-4] الاستمرارية continuity

تكون الدالة مستمرة عند $x = b$ اذا حققت الشروط الثلاث التالية :

1. $f(b)$ معرفة
2. $\lim_{x \to b} f(x)$ موجودة
3. $\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$

تعريف:

يقال للدالة f مستمرة اذا كانت مستمرة في جميع عناصر مجالها .



اذا كانت $f(x) = 8 - x^3 - 2x^2$ اثبت ان الدالة مستمرة .

الحل:

$\forall \quad b \in R$

$$\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b} (8 - x^3 - 2x^2)$$

$$= 8 - b^3 - 2b^2$$

$$f(b) = 8 - b^3 - 2b^2$$

$$\therefore \lim_{x \to b} f(x) = f(b)$$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x = b$ لكن b تمثل كل عنصر من عناصر المجال

$f(x)$ مستمرة $\forall \ x \in R$

$\therefore$ $f(x)$ مستمرة



نلاحظ من الشكل المجاور:

1. الدالة غير معرفة عند $x = 0$

$\Leftarrow$ الدالة غير مستمرة عند $x = 0$

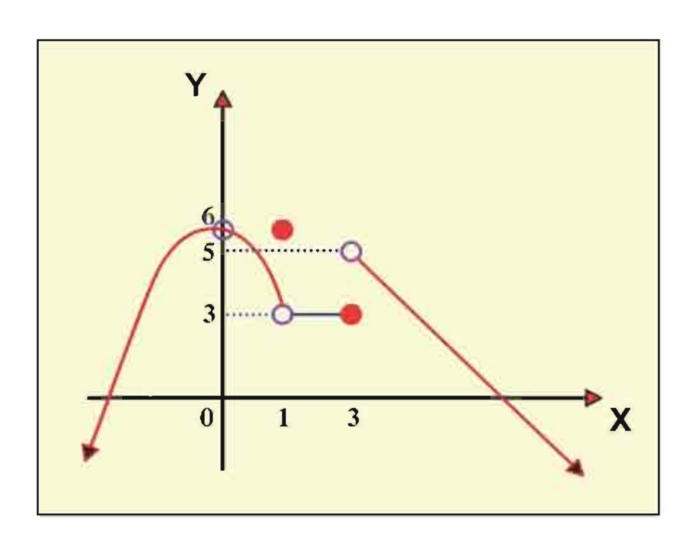
2. $f(1) = 6 \ , \ \lim_{x \to 1} f(x) = 3$

$\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$

$\therefore$ الدالة غير مستمرة عند $x = 1$

3. $\lim_{x \to +3} f(x) \neq \lim_{x \to -3} f(x)$

$\therefore$ الدالة غير مستمرة عند $x = 3$



[5-4-1] تعريف:

يقال للدالة f مستمرة عن يسار b اذا كانت معرفة عن يسار b ,اذا حققت :

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

[5-4-2] تعريف:

يقال للدالة f مستمرة عن يمين b اذا كانت معرفة عن يمين b ,اذا حققت :

$$\lim_{x\to b^+} f(x) = f(b)$$

[5-4-3] تعريف:

يقال للدالة f مستمرة على الفترة المغلقة [a,b] اذا حققت ما يأتي :

1. الدالة مستمرة على الفترة المفتوحة (a,b) .
2. الدالة مستمرة عن يمين a وعن يسار b .



$f: R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 , & x \geq 2 \\ 8 - x , & x < 2 \end{cases}$$

اثبت ان الدالة مستمرة على R .

1. نثبت ان الدالة مستمرة عند $x = 2$

$f(2) = (2)^2 + 2 = 6$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2 + 2) = 4 + 2 = 6 = L_1 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} (8 - x) = 8 - 2 = 6 = L_2 \end{cases}$$

$\therefore L_1 = L_2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 6$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$

$\therefore$ f مستمرة عند $x = 2$

.2 $\forall \quad a > 2$

$$f(a) = a^2 + 2$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (x^2 + 2) = a^2 + 2$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x = a$

$\therefore$ الدالة مستمرة $\forall \; x > 2$

.3 $\forall \quad a < 2$

$$f(a) = 8 - a$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (8 - x) = 8 - a$$

$$\therefore \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x = a$

$\therefore$ الدالة مستمرة $\forall \; x < 2$

الدالة مستمرة عند $x = 2$ ، عند $x > 2$ ، عند $x < 2$

$\therefore$ الدالة مستمرة في R

مثال 4: اثبت ان الدالة $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ مستمره على الفترة المغلقة **[-1 , 1]**.

الحل :

(1) واضح أن الدالة f مستمرة على الفترة المفتوحة (1 , 1-) وذلك لأنها مستمرة في كل نقطة من نقاط هذه الفترة .

فمثلاً لو اخذنا $x = 0$ فإن :

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{1 - x^2} = \lim_{x \to 0^-} \sqrt{1 - x^2} = 1 = f(0)$$

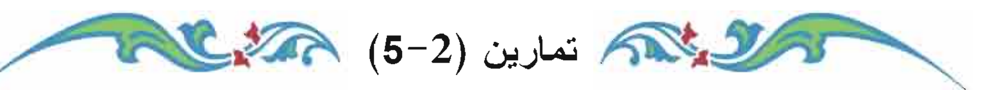
(2) الدالة f مستمرة عن يسار النقطة $x = 1$ وذلك لأن

$$\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(1)$$

(3) الدالة f مستمرة عن يمين النقطة $x = -1$ وذلك لأن :

$$\lim_{x \to -1^+} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(-1)$$

اذن تكون الدالة f مستمرة على الفترة المغلقة [-1,1] .



تمارين (2-5)

1. $f: R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} 6 - x^2 & , \; x \geq 1 \\ 4x + 1 & , \; x < 1 \end{cases}$$

ابحث استمرارية الدالة عند $x = 1$, $x = -1$

2. $f: R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & , \; x \neq 2 \\ 3 & , \; x = 2 \end{cases}$$

ابحث استمرارية الدالة عند $x = 2$

3. اذا كان $f: R \to R$, $f(x) = |2x - 6|$ ابحث استمرارية الدالة على R .

4. لتكن

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & , \; x < \sqrt{2} \\ x^2 + 1 & , \; x > \sqrt{2} \\ 4 & , \; x = \sqrt{2} \end{cases}$$

ابحث استمرارية الدالة عند $x = -1$, $x = \sqrt{2}$

5. لتكن $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$

ابحث استمرارية الدالة عند $x = 3$, $x = -3$, $x = 1$

6. اذا كانت الدالة مستمرة عند $x = 1$, $f(-1) = 5$ جد قيمة $a,b \in R$

$$f(x) = \begin{cases} 2a + x^2 & , \; x \geq 1 \\ 2x + b & , \; x < 1 \end{cases}$$

الفصل السادس

Chapter 6

The Derivative المشتقات

* نبذة تاريخية
*[6-1] التفسير الهندسي للمشتقة .
*[6-2] تطبيقات فيزيائية على المشتقة .
*[6-3] قواعد المشتقة .
*[6-4] قاعدة السلسلة .
*[6-5] معادلة المماس للمنحني والعمود على المماس .
*[6-6] الإشتقاق الضمني .
*[6-7] مشتقات الدوال الدائرية .

المصطلح	الرمز أو العلاقة الرياضية
مشتقة الدالة $f(x)$	$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
السرعة	$V(t)=\frac{ds}{dt}$
التعجيل	$g(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$
قاعدة السلسلة	$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dn}\cdot\frac{dn}{dx}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dn}\div\frac{dx}{dn}$
تركيب الدالتين $f(x)$, $g(x)$	$(fog)(x)=f(g(x))$

الفصل السادس

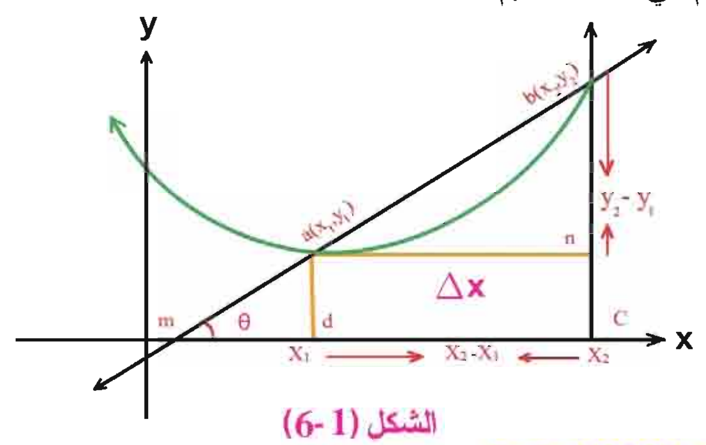
المشتقات The Derivative

نبذة تاريخية :

إن أهم الاكتشافات الرياضية في القرن السابع عشر هي اكتشاف حسبان التفاضل والتكامل من قبل اسحق نيوتن وكوتفريد وليم ليبنتز الذي بهذا الاكتشاف وصلت الرياضيات الى مستوى متقدم ، ويكون عندها انتهاء تاريخ الرياضيات الاولية بصورة رئيسة.

وقد ظهرت في البداية فكرة التكامل وذلك مع ايجاد مساحات مناطق وحجوم اجسام واطوال اقواس معينة ، ثم وجد التفاضل بعد فترة من علاقات المسائل على مماسات لمنحنيات، ومع اسئلة حول القيم العظمى والصغرى للدوال. وقد لوحظ اخيراً بإن هناك علاقة بين التكامل والتفاضل وانهما عمليتان عكسيتان.

وسنتناول في هذا الفصل مفهوم " الإشتقاق " من مسألتين شغلتا اهتمام الرياضيين الاوائل في القرن السابع عشر ومنهم العالم الالماني ليبنتز الذي نشر بحثاً وذلك في سنة 1684 للميلاد ، تطرق فيه الى مفهوم مشتقة الدالة، وقد عرّفها بميل المستقيم (غير الموازي للمحور الشاقولي) اي ان المسألة الأولى التي سنتناولها تتعلق بالمماس للمنحني عند نقطة عليه. والمسألة الثانية فهي فيزياوية تتعلق بحركة جسم في خط مستقيم.



الشكل (1-6)

[1-6] التفسير الهندسي للمشتقة

لتكن $a(x_1, y_1)$. $b(x_2, y_2)$ من نقط الدالة f

ليكن $\overleftrightarrow{ab}$ قاطعاً لمنحني الدالة في (a) و (b)

$\overleftrightarrow{ab}$ يصنع زاوية قياسها θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$$M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \overleftrightarrow{ab} \text{ ميل } = \operatorname{Tan}\theta$$

في $\triangle$ abn القائم في n

$cd = an$

$$\triangle x = x_2 - x_1 = an$$

$$\triangle y = y_2 - y_1 = bn$$

$m \measuredangle ban = m \measuredangle bmc$

$$y_2 = f(x_2) \quad , \quad y_1 = f(x_1)$$

$$\triangle x = x_2 - x_1$$

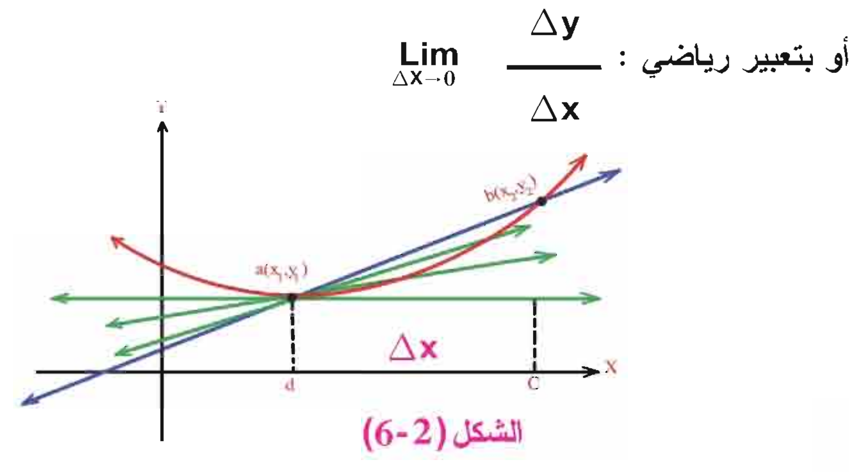
$$x_2 = x_1 + \triangle x$$

$$\operatorname{Tan}\theta = \overleftrightarrow{ab} \text{ ميل } = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \triangle x) - f(x_1)}{\triangle x}$$

اذا تصورنا بأن نقطة b (أخذت بالأقتراب) قرباً كافياً من النقطة a لوجدنا $\triangle x$ اخذت تتقارب من عدد صغير جداً جداً حتى كادت ان تكون b هي a فإن $\triangle x \to 0$

فيقال لمثل هذه الحالة بانها الغاية للدالة $\frac{f(x_1 + \triangle x) - f(x_1)}{\triangle x}$ عندما $\triangle x \to 0$

أو بتعبير رياضي : $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$



الشكل (2-6)

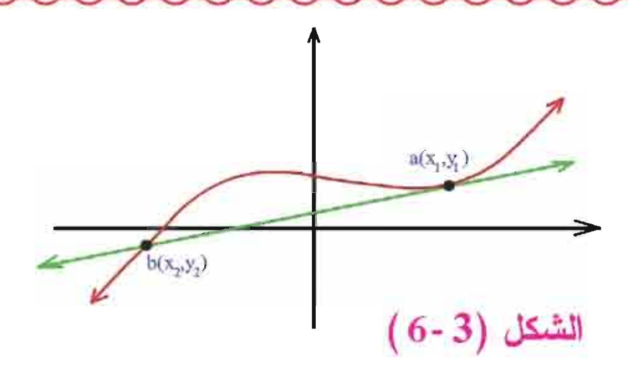
ان هذه الغاية إن وجدت فهي تمثل المشتقة عند النقطة (x_1 , y_1) وهي تساوي ميل المماس عند النقطة ويعبر عنها باحدى التعابير الاتية :

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$$

يصح لنا القول ان المشتقة عند نقطة التماس تساوي ميل **(Slope)** المماس عندها .

ملاحظة :

التماس في المنحنيات يختلف عن مفهوم التماس في الدوائر.كما في الشكل(3-6)



الشكل (3-6)

مثال 1

اذا كان

$$f(x) = x^2 + 5x + 3$$

جد $f'(2)$ مستخدماً التعريف

الحل :

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 + 5(2+\Delta x) + 3 - 17}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 + 10 + 5\Delta x - 14}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\therefore f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\,(9+\Delta x)}{\Delta x} = 9$$

مثال 2

$$f(x) = \sqrt{x+3} \qquad x \geq -3$$

جد : $f'(1)$ باستخدام التعريف .

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{1+\Delta x+3} - 2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{4+\Delta x} - 2}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{4+\Delta x} + 2}{\sqrt{4+\Delta x} + 2}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4+\Delta x - 4}{\Delta x\,(\sqrt{4+\Delta x} + 2)}$$

$$\therefore f'(1) = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

مثال 3

$f(x) = \dfrac{3}{x}$ $\quad x \neq 0$ جد $f'(x)$ باستخدام التعريف .

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{3}{x+\Delta x} - \frac{3}{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{3x - 3(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

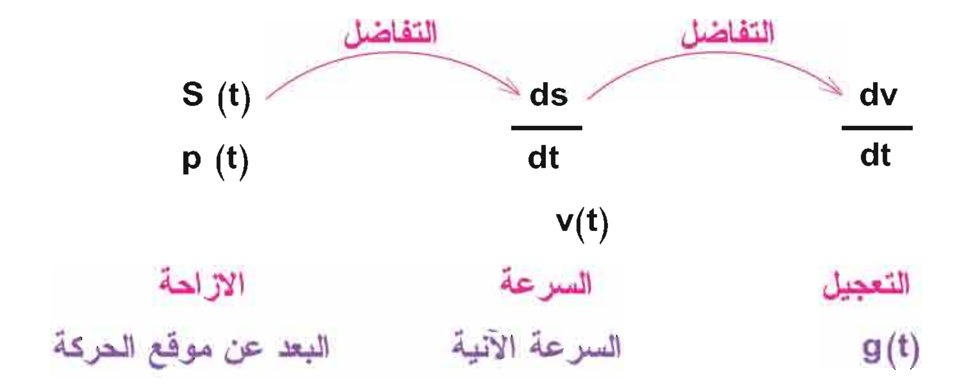
$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{3x - 3x - 3\Delta x}{X(X+\Delta X)} \times \frac{1}{\Delta X} \right) = \frac{-3}{x(x+0)} = \frac{-3}{x^2}$$

[6-2] تطبيقات فيزيائية على المشتقة

S (t) = P (t) = البعد عن موقع بداية الحركة = الازاحة (Displacement)

V (t) =(Velocity) السرعة

g (t) =(Acceleration) التعجيل



∴ مشتقة الازاحة = السرعة

مشتقة السرعة = التعجيل

مثال 1

جسم يتحرك على خط مستقيم وفقاً للقاعدة

$$S = p(t) = 3t^2 + 5t + 8$$

حيث $p(t)$ الازاحة بالامتار والزمن t بالثواني ، جد سرعة الجسم الانية باستخدام التعريف .

$$V(t) = p'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3(t+\Delta t)^2 + 5(t+\Delta t) + 8 - (3t^2 + 5t + 8)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3t^2 + 6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 + 5t + 5\Delta t + 8 - 3t^2 - 5t - 8}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t\,(6t + 3\Delta t + 5)}{\Delta t} = 6t + 5$$ م/ثا السرعة الانية

مثال 2

لتكن $v(t)$ سرعة جسم بالامتار على الثواني حيث : $v(t) = 3t^2 - 12t + 50$

جد : 1. سرعة الجسم في نهاية 3 ثواني الاولى من بدأ الحركة .

2. جد السرعة عندما التعجيل = صفر

الحل :

1.

$$v(3) = 3(3)^2 - 12(3) + 50$$

$$= 27 - 36 + 50$$

$= 41$ م / ثا السرعة في نهاية 3 ثواني الاولى

.2

$$v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3(t+\Delta t)^2 - 12(t+\Delta t) + 50 - (3t^2 - 12t + 50)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 12\Delta t}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} (6t + 3\Delta t - 12)$$

$$= 6t - 12 = 0$$

$t = 2$ ثا

$v(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 50$

$= 12 - 24 + 50$

$= 38$ م/ثا   السرعة عندما التعجيل = صفر

ملاحظة :

يقال للدالة$f(x)$قابلة للأشتقاق (Differentiable Function)عند x_1 اذا امكن ايجاد $f'(x_1)$ ويمكن القول اذا وجد مماس وحيد للمنحني عند $x = x_1$ تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند $x = x_1$.
وتكون الدالة قابلة للاشتقاق اذا كانت قابلة للاشتقاق من جميع عناصر مجالها .

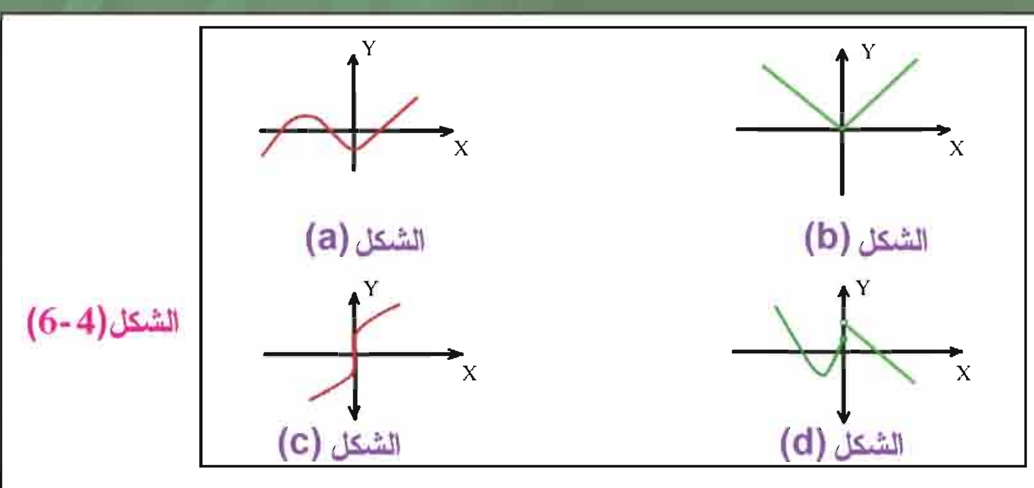
يمكن أن يصاغ التعريف : الدالة $f(x)$ قابلة للاستقامة عند النقطة

الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند النقطة
$x_1 \in (a,b)$ اذا تحقق الشرطان الاتيان :

(1) الدالة مستمرة في $[a,b]$

(2) النهاية موجودة $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

يمكن معرفة قابلية الاشتقاق من التمثيل البياني لبيان الدالة وكما في الاشكال الاتية :



الشكل(6-4)

في الاشكال الاربعة اعلاه:

شكل (a) : الدالة قابلة للاشتقاق لانها مستمرة ولا تحوي حافات حادة واي مماس يرسم للمنحني في اية نقطة لا يوازي محور الصادات .

شكل (b): الدالة غير قابلة للاشتقاق عند الصفر لوجود حافة حادة.

شكل (c): الدالة غير قابلة للاشتقاق عند الصفر لان المماس عند $x = 0$ رغم انه وحيد لكنه يوازي محور الصادات فلا ميل له .

شكل (d): الدالة غير قابلة للاشتقاق عند الصفر لانها غير مستمرة عند $x = 0$.



لتكن

$$f : R \to R$$

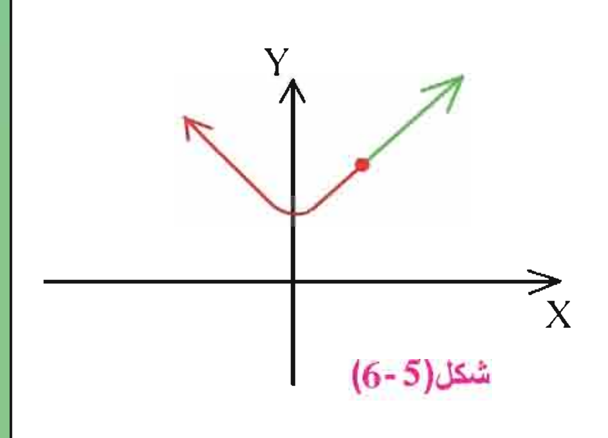
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{اذا كانت } x \leq 1 \\ 2x + 2 & \text{اذا كانت } x > 1 \end{cases}$$

1. ارسم المخطط البياني للدالة f ، اثبت انها مستمرة عند $x = 1$
2. هل الدالة f قابلة للاشتقاق بين ذلك ؟

الحل :

1. $y = f(x) = x^2 + 3$ $\quad x \leq 1$

x	y
1	4
0	3
−1	4



شكل(6-5)

$y = 2x+2 \qquad x > 1$

	x	y
فجوة	1	4
	2	6

برهنة f مستمرة عند (1)

$f(1) = 1^2+3=4$

$$= \lim_{x\to1} f(x) \begin{cases} \lim_{x\to^-1} (x^2+3) = 4 = L_1 \\ \lim_{x\to^-1} (2x+2) = 4 = L_2 \end{cases}$$

$\therefore L_1 = L_2$

$\lim_{x\to1} f(x) = 4$ موجودة

$\therefore \lim_{x\to1} f(x) = f(1)$

$\therefore$ f مستمرة عند $x=1$

.2

.a عندما $x \to {}^+1$

$$f'(1) = \lim_{\Delta x\to0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to0} \frac{2(1+\Delta x)+2-4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to0} \frac{2+2\Delta x-2}{\Delta x} = 2 = L_1$$

b. عندما $x \to {}^{-}1$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2 + 3 - 4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2+\Delta x)}{\Delta x} = 2 = L_2$$

$$L_1 = L_2$$

$\therefore$ f قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

c. عندما $x < 1$

$\forall\ a < 1$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a+\Delta x)^2 + 3 - (a^2+3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^2 + 2a\Delta x + (\Delta x)^2 + 3 - a^2 - 3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\,(2a+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(a) = 2a$$

f قابلة للاشتقاق عند $x=a$

f قابلة للاشتقاق $\forall\ x < 1$ ،

عندما $x > 1$ ، $\forall\ a > 1$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(a+\Delta x)+2-(2a+2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2a+2\Delta x+2-2a-2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} \Rightarrow f'(a) = 2$$

الدالة قابلة للاشتقاق عند $x = a$

الدالة قابلة للاشتقاق $\forall\ x > 1$ (الدالة قابلة للاشتقاق $\forall\ x > 1$)

برهنا f قابلة للاشتقاق عند $x = 1$ ، $\forall\ x > 1 , \forall\ x < 1$

$\therefore$ f قابلة للاشتقاق .



$f : R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3 & x \geq 2 \text{ اذا كانت} \\ 4x-1 & x < 2 \text{ اذا كانت} \end{cases}$$

1. هل الدالة قابلة للاشتقاق عند $x = 2$
2. هل الدالة مستمرة عند $x = 2$ ؟

الحل :



$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

a. $$\lim_{\Delta x \to {}^{+}0} \frac{(2+\Delta x)^2+3-(4+3)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to {}^{+}0} \frac{4+4\Delta x+(\Delta x)^2+3-7}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4+\Delta x)}{\Delta x} = 4 = L_1$$

b. $$\lim_{\Delta x \to {}^{-}0} \frac{4(2+\Delta x)-1-7}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to {}^{-}0} \frac{8+4\Delta x-8}{\Delta x} = 4 = L_2$$

$\therefore L_1 = L_2$

$\because$ الدالة قابلة للاشتقاق عند $x = 2$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x = 2$ (اذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق عند نقطة فانها مستمرة في تلك النقطة)

لكن العكس غير صحيح كما في المثال الاتي :



$f : R \rightarrow R$

$f(x) = | x - 3 |$

1. برهن على ان الدالة مستمرة عند $x = 3$
2. هل الدالة قابلة للاشتقاق عند $x = 3$ ؟

الحل :



$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & , \quad x \geq 3 \\ 3 - x & , \quad x < 3 \end{cases}$$

$$f(3) = 3 - 3 = 0$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3} (x-3) = 3-3 = 0 = L_1 \\ \lim\limits_{x \to 3} (3-x) = 3 - 3 = 0 = L_2 \end{cases}$$

$\therefore L_1 = L_2$

$\therefore \lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$ موجودة

$\therefore \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x = 3$

2.

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

a. $$\lim_{\Delta x \to {}^{+}0} \frac{3 + \Delta x - 3 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 = L_1$$

b. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{3-(3+\Delta x)-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 = L_2$

$\therefore L_1 \neq L_2$

الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x=3$

من المثالين السابقين يمكن استنتاج المبرهنة الاتية والتي سنقبلها بدون برهان .

مبرهنة :

اذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق عند $x=a$ ، فإن الدالة مستمرة عند $x=a$

الرموز المستخدمة في المشتقة :

لتكن $Y = f(x)$

المشتقة الاولى = $(f(x)) \frac{d}{dx} = \frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$

$$\text{ميل المماس} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

لمنحني الدالة عند أي نقطة (x,y) من نقطه .

[6-3] قواعد المشتقة

1. لتكن $c \in R$ ، $f(x)=c$ دالة ثابتة

فإن $f'(x)=0$

أي أن $\frac{dy}{dx} = 0$

مثال 1

جد $f'(x)$

$f(x) = 5 \Rightarrow f'(x) = 0$

$f(x)=\sqrt{2} \Rightarrow f'(x) = 0$

2. لتكن $f(x)=x^n$

حيث $n \in R$, $x \in R \setminus \{0\}$

فأن $f'(x) = nx^{n-1}$



جد $f'(x)$

1. $f(x)=x^6$

$\therefore f'(x)=6x^5$

2. $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$

$\therefore f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$

3. $g(n)= \sqrt[3]{n}$

$g(n)=n^{\frac{1}{3}}$

$\therefore g'(n)= \frac{1}{3} n^{\frac{-2}{3}}$

اذا اكانت كل من f , g , h دوال قابلة للاشتقاق عند x وكذلك $c \in R$

3.

$$f(x) = cg(x)$$
$$f'(x) = cg'(x)$$

4.

$$f(x) = g(x) \pm h(x)$$
$$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

مثال 3 جد $h'(x) , g'(x)$

1. $$g(x) = \frac{3}{2x^2} + \frac{5x^2}{3} - \frac{7x}{5} - \frac{1}{6}$$

$$g(x) = \frac{3}{2} x^{-2} + \frac{5x^2}{3} - \frac{7x}{5} - \frac{1}{6}$$

$$g'(x) = -3x^{-3} + \frac{10x}{3} - \frac{7}{5}$$

2. $$h(x) = 10 \left(\frac{x^2}{50} + \frac{x}{9} - \frac{1}{3} \right)$$

$$h'(x) = 10 \left(\frac{2x}{50} + \frac{1}{9} \right)$$

$$= 10 \left(\frac{x}{25} + \frac{1}{9} \right)$$

5.

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$
$$f'(x) = g(x)\, h'(x) + h(x)\, g'(x)$$

مشتقة حاصل ضرب دالتين = الدالة الاولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الدالة الاولى



$$f(x) = (3-2x-x^5)\ (2x^7+5)$$

$$f'(x) = (3-2x-x^5)\ (14x^6)+(2x^7+5)\ (-2-5x^4)$$

6.

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \qquad h(x) \neq 0$$

$$f'(x) = \frac{h(x)\ g'(x)-g(x)\ h'(x)}{(h(x))^2}$$

مشتقة حاصل قسمة دالتين = $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

مثال 5

جد $f'(x)$

$$f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^2+5}$$

التبسيط يترك للطالب

$$f'(x) = \frac{(x^2+5)(2x+3)-(x^2+3x+1)(2x)}{(x^2+5)^2}$$

ملاحظة :

$$\frac{d}{dx}(f'(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

اذا كانت هذه الغاية موجودة تسمى المشتقة الثانية للدالة f بالنسبة الى x ويرمز لها بالرمز:

$$f''(x) = y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$$

وبالطريقة نفسها تعرف المشتقة الثالثة والرابعة .....

7.

اذا كان

$g(x) = u^n$

فأن

$g'(x) = \frac{dg}{dx}$

أي

$\frac{d}{dx}(u)^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$

مثال 6

اذا كان $y = (1-x)^3$ جد y' , y'' عند $x = 2$

الحل :

$y = (1-x)^3$

$y' = 3(1-x)^2 \; (-1)$

$y' = -3\,(1-x)^2$

عند $x=2$

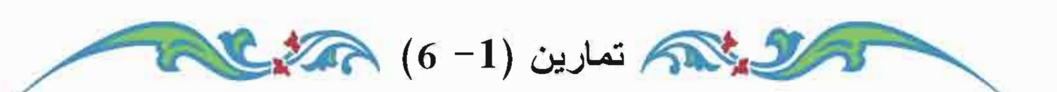
$\therefore y' = -3(1-2)^2 = -3$

$y'' = -6\,(1-x)\,(-1)$

$y'' = 6(1-x)$

عندما $x=2$

$y'' = 6(1-2) = -6$



تمارين (1 − 6)

.1

أ. $f(x)=3x^2+4x+2$ باستخدام التعريف جد $f'(1)$

ب. $g(x)=\sqrt{x}$ جد اوسع مجال الى الدالة ومشتقتها .

جـ. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ حيث $x \neq 1$ جد باستخدام التعريف $f'(2)$

.2 ابحث استمرارية وقابلية الاشتقاق لكل من الدوال التالية عند قيم x التي أمامها :

أ.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{اذا كان } x \leq 2 \\ 7-x & \text{اذا كان } x > 2 \end{cases}$$

عند $x = 2$

ب.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{اذا كان } x \geq -1 \\ -2x-1 & \text{اذا كان } x < -1 \end{cases}$$

عند $x = -1$

.3 جد $a,b \in R$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+5 & \text{اذا كان } x \geq 1 \\ ax+b & \text{اذا كان } x < 1 \end{cases}$$

اذا كانت قابلة للاشتقاق عند $x=1$



$f : R \to R$

$f(x) = |2x - 6|$

هل الدالة قابلة للاشتقاق عند $x=3$.

5. باستخدام قواعد المشتقة جد المشتقة الاولى لكل مما يأتي ازاء العدد المؤشر امامها :-

1. $f(x) = 3x^2 + 5x + 8$ عند $x=1$

2. $f(x) = x\sqrt{x^2 + 3}$ عند $x=-1$

3. $f(x) = \left(\dfrac{x^2 + 3}{x^2 + 1}\right)^4$ عند $x=0$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - x)^2}$ عند $x=-1$

6. $y = \sqrt[3]{3x + 5}$ جد y' , y'' عند $x = 1$.

[6-4] قاعدة السلسلة

Chain Rule

1.

y = f(n)   f قابلة للاشتقاق عند n

n = g(x)   g قابلة للاشتقاق عند x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \times \frac{dn}{dx}$$

مثال 1

اذا كان كل من $y= 3n^2 +5$ و $n=4x +3$

جد : $\frac{dy}{dx}$

الحل :

$$\frac{dy}{dn} = 6n$$

$$\frac{dn}{dx} = 4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \times \frac{dn}{dx}$$

$$= 6n\,(4)$$

$$= 24\,n$$

$$\because n = 4x+3$$

$$\therefore = 24\,(4x+3)$$

$$= 96x + 72$$

حل آخر : نعوض عن قيمة n في $y =3n^2+5$

$$\Rightarrow \quad y = 3\,(4x +3)^2 +5$$

$$\therefore \acute{y} = 6(4x+3)(4)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 24\,(4x+3)$$

$$= 96x+72$$

2.

$y = f(n)$ f قابلة للاشتقاق عند n

$x = g(n)$ g قابلة للاشتقاق عند n

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \div \frac{dx}{dn}$$

مثال 2

اذا كان

$$x = 3n - 4$$

$$y = 2n + 5$$

جد $\frac{dy}{dx}$

الحل :

$$\frac{dx}{dn} = 3$$

$$\frac{dy}{dn} = 2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \div \frac{dx}{dn}$$

$$= \frac{2}{3}$$



اذا كان

$$y = 5n + 4$$

$$x = 3n + 1$$

جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $n=1$

الحل :

$$\frac{dy}{dn} = 5$$

$$\frac{dx}{dn} = 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \div \frac{dx}{dn}$$

$$= \frac{5}{3}$$

عندما $n = 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{3}$$

مثال 4

اذا كان $y = n^2 + 3n + 2$

$n = 2x + 1$

جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 2$

الحل :

$$\frac{dy}{dn} = 2n+3$$

$$\frac{dn}{dx} = 2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \times \frac{dn}{dx}$$

$$= (2n+3)(2)$$

$$= 4n + 6$$

$$\because n = 2x+1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4(2x+1) + 6$$

$$= 8x + 4 + 6$$

$$= 8x + 10$$

عند $x=2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 16 + 10 = 26$$

3. إذا كان $f(x)$ ، $g(x)$ كلاهما قابلة للإشتقاق عند X

فإن : $(fog)(x) = f(g(x))$

وإن : $(fog)'(x) = f'(g(x))\ g'(x)$

[6-5] معادلة المماس للمنحني والعمود على المماس

نعوض قيمة x_1 في الدالة نحصل على y_1 { لان $y = f(x)$ } النقطة (x_1, y_1) نعوض x_1 في المشتقة الاولى نحصل على ميل المماس عند تلك النقطة .



جد معادلة المماس للمنحني $f(x) = (3-x^2)^4$ عند $x = 2$

الحل :

$f(2) = (3-4)^4 = 1$

$\therefore$ النقطة $(2,1)$

$f'(x) = 4(3-x^2)^3(-2x)$

$f'(2) = 4(3-4)^3(-4)$

$= 4(-1)^3(-4) = 16$ ميل المماس

نطبق القاعدة :

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$16 = \frac{y-1}{x-2}$$

$16x - 32 = y - 1$

$16x - y - 32 + 1 = 0$

$16x - y - 31 = 0$

مثال 2

جد معادلة المماس والعمود على المماس للمنحني $f(x) = (2x-1)^5$ عند $x = 1$

الحل :

$f(1) = (2-1)^5 = 1$

$\therefore (1, 1)$ نقطة التماس

$f'(x) = 5(2x-1)^4 \, (2)$ ميل المماس في اي نقطة

$= 10(2x-1)^4$

$f'(1) = 10(2-1)^4 = 10$ ميل المماس في نقطة التماس

$$10 = \frac{y-1}{x-1}$$

$10x - 10 = y - 1$

$10x - y - 9 = 0$ معادلة المماس

$\frac{-1}{10} =$ ميل العمود

$$\frac{-1}{10} = \frac{y-1}{x-1}$$

(ميل العمود = $\frac{-1}{\text{ميل المماس}}$)

$\Rightarrow 10y - 10 = -x + 1$

$x + 10y - 10 = 1$

$10y + x - 11 = 0$ معادلة العمود



جد معادلة المماس لمنحني الدالة $y = (fog)(x)$ عند $x=1$ اذا كان

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$
$$g(x) = 3x+5$$

الحل :

$$(fog)(x) = f[g(x)]$$
$$= \sqrt[3]{3x+5}$$
$$\therefore y = \sqrt[3]{3x+5}$$

عندما $x=1$

$y = \sqrt[3]{3+5} = 2 \Rightarrow (1,2)$ نقطة التماس

$$(fog)(x) = (3x+5)^{\frac{1}{3}}$$

$$(fog)'(x) = \frac{1}{3}(3x+5)^{-\frac{2}{3}} \times 3$$

$$(fog)'(1) = \frac{1}{3}(2^3)^{-\frac{2}{3}} \times 3$$

$= \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ ميل لمماس في نقطة التماس

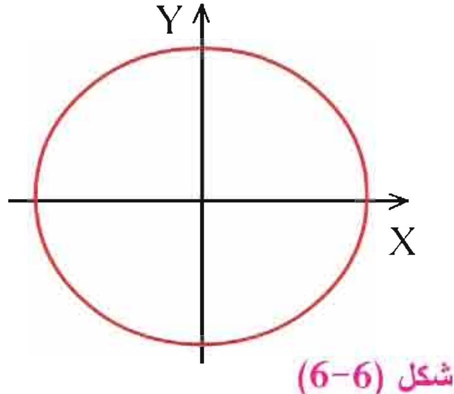
$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$
$$\frac{1}{4} = \frac{y-2}{x-1}$$

$$\Rightarrow x-1 = 4y-8$$

$x-4y+7=0$ معادلة المماس

[6-6] الاشتقاق الضمني Implicit Differentiation

حين تكون y دالة معطاة في x أي $y= f(x)$ ، فيقال ان الدالة صريحة ويسمى x بالمتغير المستقل بينما y بالمتغير التابع .



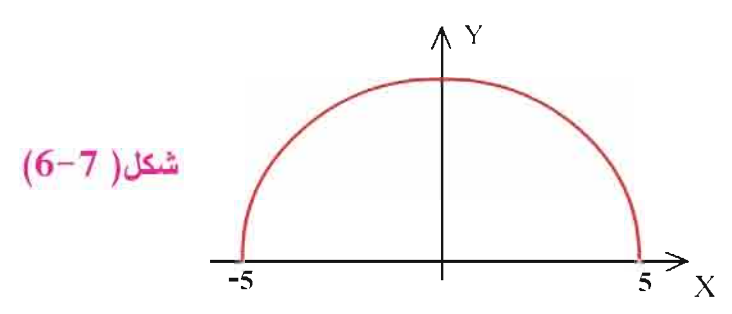
شكل (6-6)

$x^2+ y^2 = 25$ معادلة دائرة وهي ليست دالة .

لكن $y^2 = 25 - x^2$

$y = \mp\sqrt{25 - x^2}$

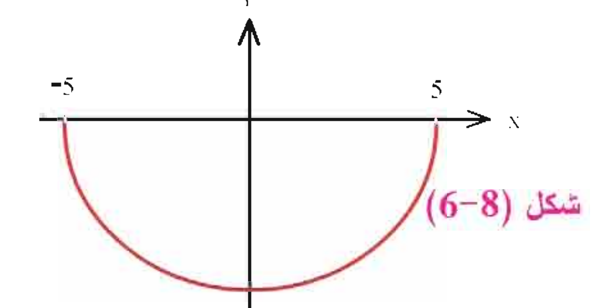
فلو رسمنا $y = \sqrt{25 - x^2}$ لوجدنا انه يمثل نصف الدائرة الاعلى كما في الشكل (6-7):



شكل (6-7)

وكذلك $y = -\sqrt{25 - x^2}$ وهي تمثل نصف الدائرة الاسفل الشكل (6-8) :

ولكل من العلاقتين :



شكل (6-8)

$y = \sqrt{25 - x^2}$. $y= -\sqrt{25 -x^2}$

يمثلان دالة مجالها = $[-5,5]$

أي أننا عرفنا دالتين ضمن العلاقة $x^2 +y^2 =25$ والتي كما اسلفنا لا تمثل دالة يقال لكل من

$y = \sqrt{25 - x^2}$. $y= -\sqrt{25 - x^2}$ دالة ضمنية.

ولإيجاد مشتقة العلاقة : لتكن $y= f(x)$

$$x^2 + (f(x))^2 = 25$$

$$2x + 2(f(x))\ f'(x) = 0$$

$$\because f(x) = y ,\ f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$$



اذا كان $x^2 - y^2 = 7y - x$ جد

$$\frac{dy}{dx}$$

الحل :

$$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 7\frac{dy}{dx} - 1$$

$$2x + 1 = 7\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$2x + 1 = \frac{dy}{dx}(7+2y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{7+2y}$$



مثال 2

جد معادلة المماس للدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(-3, 4)$

الحل :

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{y-4}{x+3} = \frac{3}{4}$$

$$3x + 9 = 4y - 16$$

$$3x - 4y + 25 = 0$$

مثال 3

اذا كان $x^2 + y^2 = 10$ اثبت ان : $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y \frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0$

الحل :

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x + y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$1 + y \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \times \frac{dy}{dx} = 0$$

$$1 + y \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y \frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0$$ (و.هـ.م)

مثال 4

جسم يتحرك على خط مستقيم وفقاً القاعدة $P(t) = \frac{1}{3} t^3 - 2t^2 + 3t + 5$

حيث $p(t)$ الازاحة بالامتار، t الزمن بالثواني ، جد السرعة عندما التعجيل = صفر

السرعة $p'(t) = \frac{1}{3}(3)\, t^2 - 4t + 3$

التعجيل $p''(t) = 2t - 4$

$2t - 4 = 0$

$t - 2 = 0$

$t = 2$

السرعة عندما التعجيل = صفر ، $p'(2) = 4 - 8 + 3 = -1$



لتكن $v(t)$ سم /ثا سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم $v(t) = 3t^2 - 6t + 9$

1. جد السرعة عندما $t=2$ ثا .
2. جد السرعة عندما التعجيل = صفر .

الحل :

1. $v(2) = 3(2)^2 - 6(2) + 9$

$= 12 - 12 + 9 = 9$ سم/ثا

2. التعجيل $v'(t) = 6t - 6$

$6t - 6 = 0$

$6t = 6$

$t = 1$

السرعة عندما التعجيل = صفر سم/ثا $v(1) = 3 - 6 + 9 = 6$



تمارين (6-2)



1. اذا كان :

$g(x) = (1+2x^2+5x)^{3/2}$

$f(x) = 2x$

جد : $(gof)'(0)$

2. اذا كان :

$y = n^3+3n-5$

$n = 2x+1$

جد: $\frac{dy}{dx}$

3. إذا كان $y = an^2+3n-7$

$n = 2x+1$

وكان $\frac{dy}{dx} = 30$ عندما $x = 1$ ، جد قيمة a

4. اذا كان :

$y = 3n^2+2n+4$

$x = 8n+5$

جد : $\frac{dy}{dx}$ عندما $n = 1$

5. إذا كان $xy^2+4x^2=7x-2y$

جد : $\frac{dy}{dx}$

6. اذا كان $xy^2 + yx^2 = 2$

اثبت ان $\frac{dy}{dx} = -1$ عند $(1,1)$

7. جسم يتحرك على خط مستقيم وفق القاعدة $p(t)=24t^2-t^3$

حيث: $p(t)$ الازاحة بالامتار، t الزمن بالثواني

1. جد سرعة الجسم بعد 2 ثا من بدء الحركة .
2. جد الازاحة عندما التعجيل = صفر.

8. لتكن $v(t)$ سم/ ثا تمثل سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم وإن

$v(t)=t^3-t^2+5$

جد السرعة عندما التعجيل = 8 سم/ثا٢

9. جد معادلة المماس لمنحني الدالة

$f(x)=\sqrt{x^2+3}$ عندما $x=-1$

10. اذا كان : $f(x)=x-x^2$

$g(x)=\sqrt{2x+1}$

حيث : $x\geq -\frac{1}{2}$

جد معادلة المماس للمنحني $(fog)(x)$ عند $x=4$

11. جد معادلتي المماس للمنحني $x^2+y^2-5xy=15$ عند $y=-2$

[6-7] مشتقات الدوال الدائرية Dervetive of the Circlar funtions

عرفنا سابقاً ان المشتقة الاولى للدالة f عند x= a هي :

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

ويمكن استخدام هذا التعريف لبرهان

1. $$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin x (1-\cos \Delta x) + \cos x \sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$= -\sin x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1-\cos \Delta x}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$= -\sin x . 0 + \cos x . 1$$

$$= \cos x$$

ملاحظة :

جا س هو sin x

جتا س هو cos x

ظا س هو tan x tangent

ظتا س هو cot x cotangent

قا س هو sec x secant

قتا س هو csc x cosecant

2.
$$f(x) = \cos x$$
$$f'(x) = -\sin x$$

البرهان :

$$f(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\Pi}{2} - x\right)$$
$$f'(x) = \cos\left(\frac{\Pi}{2} - x\right)(-1)$$
$$f'(x) = -\sin x$$



القواعد الاخرى سنطرحها بدون برهان :

1.
$$\frac{d}{dx}(\sin y) = \cos y \frac{dy}{dx}$$

مثال

$$\frac{d}{dx}\sin 5x = \cos 5x \,.\, 5$$

2.
$$\frac{d}{dx}\cos y = -\sin y \frac{dy}{dx}$$



مثال

$$\frac{d}{dx}\cos x/2 = -\sin \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

3.
$$\frac{d}{dx}(\tan y) = \sec^2 y \frac{dy}{dx}$$

مثال

$$\frac{d}{dx}\tan x^2 = \sec^2 x^2 \,.\, 2x$$

4.
$$\frac{d}{dx}\cot y = -\csc^2 y \frac{dy}{dx}$$

مثال

$$\frac{d}{dx}\cot 8x = -\csc^2 8x \,.\, (8)$$

5.
$$\frac{d}{dx}\sec y = \sec y \tan y \frac{dy}{dx}$$

مثال

$$\frac{d}{dx}\sec 4x = \sec 4x \tan 4x \,.\, (4)$$

6. $\frac{d}{dx}\csc y = -\csc y \cot y \frac{dy}{dx}$



$$\frac{d}{dx}\csc 5x = -\csc 5x \cot 5x \ . \ 5$$

أمثلة :

مثال 1

$$f(x) = \sin (7x^2+4x+1)$$

جد: $f'(x)$

الحل :

$$f'(x) = \cos (7x^2+4x+1)(14x+4)$$

$$= (14x+4)\cos (7x^2+4x+1)$$

مثال 2

$$f(x) = \sin \sqrt[3]{x}$$

$$= \sin x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \cos x^{\frac{1}{3}} \ . \ 1/3 \ x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} \cos \sqrt[3]{x}$$

$$= \frac{\cos \sqrt[3]{x}}{3 \sqrt[3]{x^2}}$$



$$f(x) = \cos^3 7x$$

$$f(x) = (\cos 7x)^3$$

$$f'(x) = 3 (\cos 7x)^2 (-\sin 7x \ . \ 7)$$

$$= -21 \cos^2 7x \sin 7x$$



مثال 4

$f(x) = \cos 3x - \tan 5x + \sec 4x$

$f'(x) = -3 \sin 3x - 5 \sec^2 5x + 4 \sec 4x \tan 4x$

مثال 5

جد معادلة المماس عند $x = 0$ للدالة $f(x) = 3 \sin x + 4 \cos x$

الحل :

$f(x) = 3 \sin x + 4 \cos x$

$f(0) = 3 \sin 0 + 4 \cos 0 = 0 + 4 \times 1 = 4$

نقطة التماس $(0,4)$

$f'(x) = 3 \cos x - 4 \sin x$

$f'(0) = 3 \cos 0 - 4 \sin 0$

$= 3 - 0 = 3$ ميل المماس

$$m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$$

$$3 = \frac{y-4}{x-0}$$

$3x = y - 4$

$3x - y + 4 = 0$ معادلة المماس

مثال 6

$f(x) = (\sec 5x)^3$

جد $f'(x)$

الحل :

$f(x) = (\sec 5x)^3$

$f'(x) = 3 (\sec 5x)^2 (\sec 5x \tan 5x \cdot 5)$

$= 15 \sec^3 5x \tan 5x$



مثال 7

جسم يتحرك على خط مستقيم وفقا القاعدة: $p(t) = 3\cos 2t$ حيث $p(t)$ الازاحة بالامتار ، t الزمن بالثواني. جد السرعة عندما $t = 0$ ، جد التعجيل عند $t = \frac{\Pi}{6}$.

الحل :

$$p'(t) = -3 \sin 2t.2$$

$$= -6 \sin 2t$$

$$p'(0) = -6 \sin 0 = 0 \; m/sec$$ السرعة عندما $t = 0$

$$p''(t) = -6 \cos 2t .2$$

$$= -12 \cos 2t$$

$$p''\left(\frac{\Pi}{6}\right) = -12 \cos \frac{\Pi}{3} = -12 \times \frac{1}{2} = -6 \; m/sec^2$$



تمارين(3-6)



1 جد y'

1. $y = \sin(5 - x^3)$
2. $y = \sqrt{\cos(4x + 2)}$
3. $y = x \sec x^2$
4. $y = \sin 3x \cos 3x$
5. $y = \sqrt[3]{\cot^2 4x}$
6. $y = \csc^5 (x^2 + 1)$
7. $y = (\sin 3x - \cos 3x)^2$

2. اذا كان $\sin xy^2 = 4x - 3y$ جد $\frac{dy}{dx}$

3. اثبت صحة

a $\frac{d}{dx}\left[\sin ax - \frac{1}{3}\sin^3 ax\right] = a \cos^3 ax$

b. $$\frac{d}{dx}\left(\frac{2-\cos x}{2+\cos x}\right)=\frac{4\sin x}{(2+\cos x)^2}$$

4. جد : y'

$$y = \cos^4 x - \sin^4 x$$

5. جد معادلة المماس للمنحني $f(x) = \sin 2x + \sin x$

عند $x = \frac{\Pi}{2}$

6. جسم يتحرك على خط مستقيم وفقاً للقاعدة $p(t) = \sin 2t - \cos 2t$

حيث $p(t)$ الازاحة بالامتار، t الزمن بالثواني.

جد كلاً من بعد الجسم ، سرعته وتعجيله عندما $t = \Pi / 4$

7. اذا كان $v(t)$ سم / ثا تمثل سرعة جسم متحرك على خط مستقيم حيث

$$v(t) = 4\sin\frac{t\Pi}{4} + 8\cos\frac{t\Pi}{4}$$

جد السرعة والتعجيل عندما $t = 1$

الفصل السابع

Chapter 7

الهندسة الفضائية (المجسمة) Space Geometry

تمهيد

الفصل السابع

الهندسة الفضائية (المجسمة) Space Geometry

تمهيد

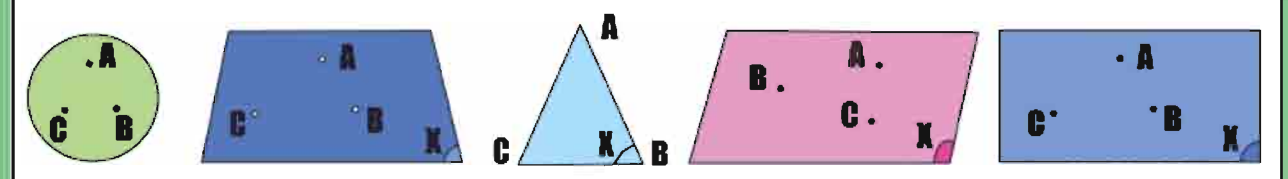
سبق ان درست في الهندسة المستوية كلاً من النقطة والمستقيم حيثُ رمزنا له $\overleftrightarrow{AB}$ أو $\overleftrightarrow{L}$

واستخدمنا الرمز $\overline{AB}$ للدلالة على قطعة المستقيم AB

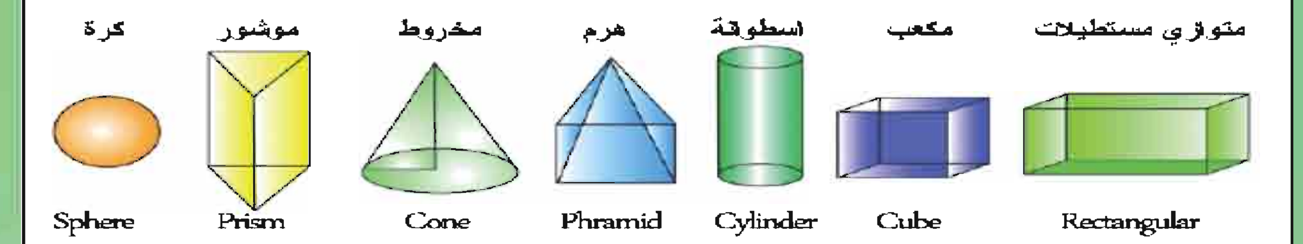
*والرمز $\|AB\|$ للدلالة على طول القطعة المستقيمة AB

وسندرس مصطلح هندسي يدعى المستوي plane وهو الذي لو أخذت عليه اي نقطتين ووصل بينهما بمستقيم لنطبقت جميع نقاط ذلك المستقيم عليه مثل زجاج النافذة ، سطح المنضدة ، ساحة ملعب كرة القدم ، ....

وهو بلا حدود من جميع جهاته ويمثل على شكل مثلث Triangle، مربع Square، مستطيل Rectangle، متوازي اضلاع Parallelogram، شبه منحرف Trapezoid، دائرة Circle، ...... ويرمز له (X) أو (Y) ويقرأ المستوي X أو Y كما في الأشكال الآتية :



ودرست العلاقة بين النقطة (point) والمستقيم (line) التي يحويها مستوٍ واحد كما درست بعض المجسمات مثل :



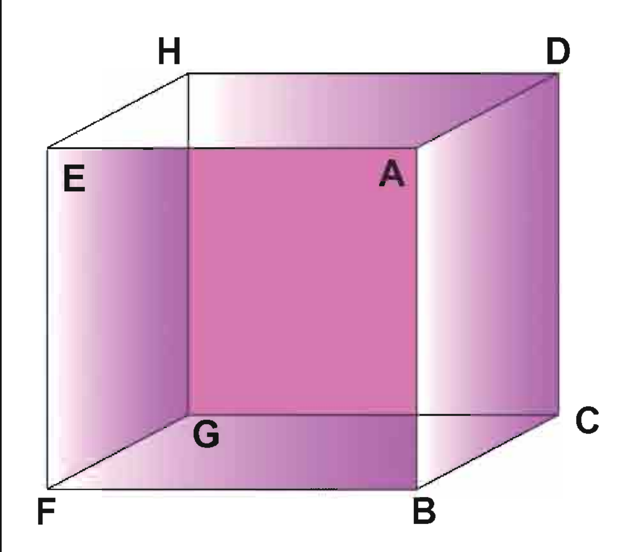
كما شاهدتها كالأجهزة المنزلية (الثلاجة ، الغسالة ، المبردة ، التلفزيون ، ...)

وهي تمثل اشكالاً هندسية ذات ثلاثة أبعاد وتشغل حيزاً من الفراغ وأن دراستها تسمى بالهندسة الفضائية وهي التي تدرسُ العلاقة بين النقط والمستقيمات والمستويات التي يحويها الفضاء .

نشاط (1):

لاحظ الشكل الاتي للاجابة عن الاسئلة الآتية:

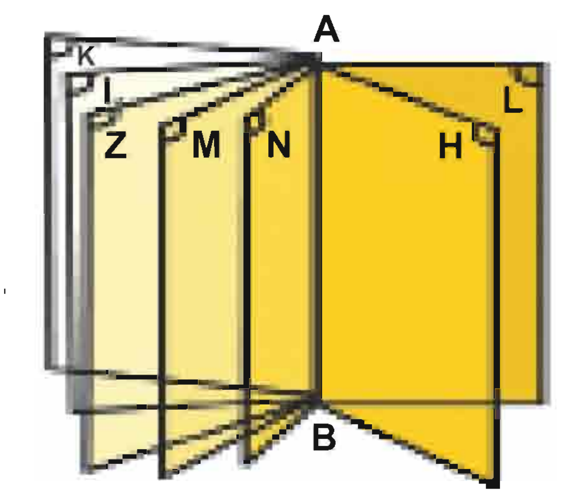
1- المستقيمات التي تمر بالنقطة A
2- المستقيمات التي تمر بالنقطتين B , A معاً
3- المستويات التي تمر بالنقطة A
4- المستويات التي تمر بالنقطتين A و B معاً



نشاط (2):

لاحظ الشكل الاتي للاجابة عن الاسئلة الآتية:

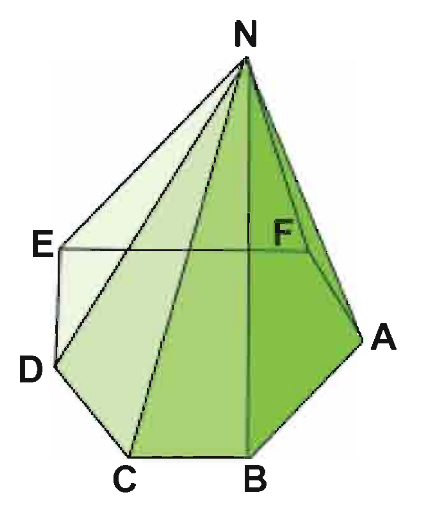
1- اذكر المستويات التي تمر بالنقطة A
2- اذكر المستويات التي تمر بالمستقيم AB



نشاط (3):

لاحظ الشكل الاتي للاجابة عن الاسئلة الآتية:

1- اذكر مستقيماً يمر بالنقطة N
2- اذكر مستوياً يمر بالنقطة N
3- اذكر مستوياً يمر بالنقطتين A , N
4- اذكر مستوياً يمر بالنقاط B , A , N
5- اذكر اربع نقط ليست في مستوٍ واحد



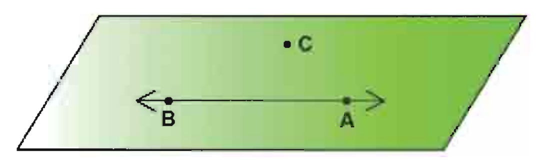
مما سبق نستنتج :

[1-7] عبارة اولية :

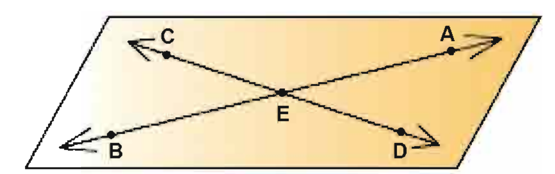
لكل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة Non - collinear يوجد مستوٍ واحد فقط (وحيد) يحويها

ومنها نحصل على :

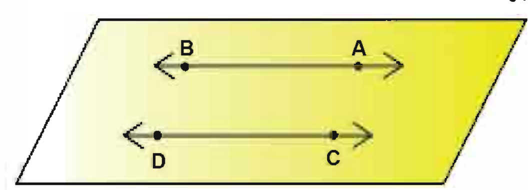
أ لكل مستقيم ونقطة لا تنتمي اليه يوجد مستوٍ وحيد يحويها.



ب لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويها.

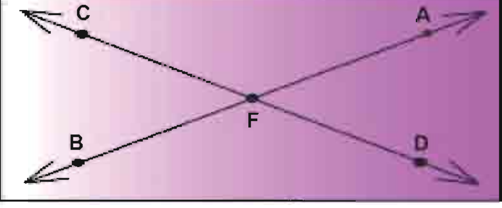


جـ لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحويها .

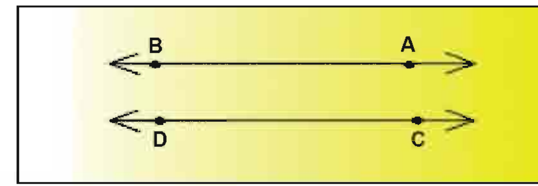


[2-7] العلاقة بين مستقيمين في الفضاء:

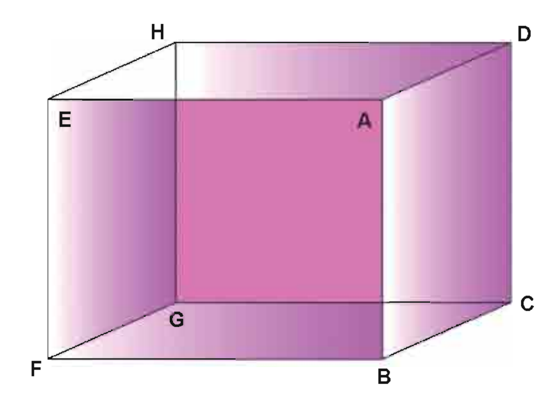
أ المستقيمان المتقاطعان Intersecting Lines : اللذان يشتركان بنقطة واحدة فقط وهما في مستوٍ واحد



ب المستقيمان المتوازيان parallel lines : اذا لم يشتركا باية نقطة وهما في مستوٍ واحد



جـ المستقيمان المتخالفان skew lines : اللذان لا يمكن ان يحتويهما مستوٍ واحد (اي انهما غير متقاطعين وغير متوازيين)



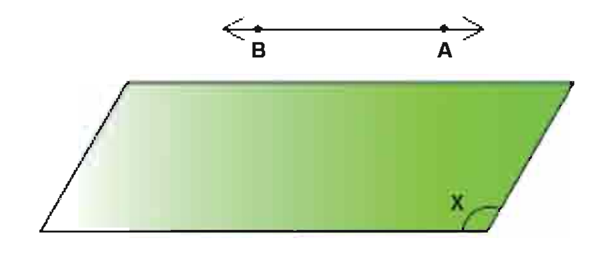
نشاط:

من الشكل المجاور نلاحظ $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{DH}$ متخالفين:

1. اذكر ثلاثة ازواج من المستقيمات المتخالفة.
2. اذكر ثلاثة ازواج من المستقيمات المتوازية.
3. اذكر ثلاثة ازواج من المستقيمات المتقاطعة.

[1-2-7] العلاقة بين مستقيم ومستوي :

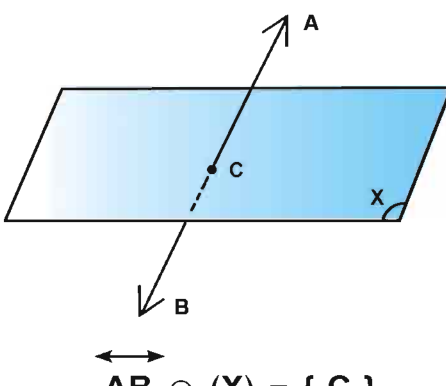
أ المستقيم الموازي للمستوي : اذا لم يشترك معه بأية نقطة أو كان محتوى فيه



$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$

$\overleftrightarrow{AB} // (X)$, $\overleftrightarrow{AB} \cap (X) = \varnothing$

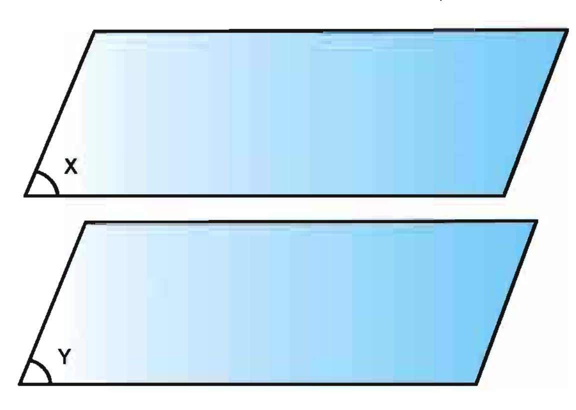
ب المستقيم القاطع للمستوي : اذا اشترك معه بنقطة واحدة فقط



$\overleftrightarrow{AB} \cap (X) = \{ C \}$

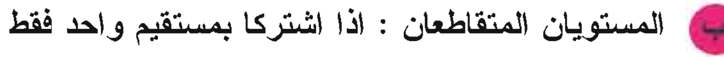
[2-2-7] العلاقة بين مستويين في الفضاء

أ المستويان المتوازيان : اذا لم يشتركا بأية نقطة



$(X) \cap (Y) = \varnothing$

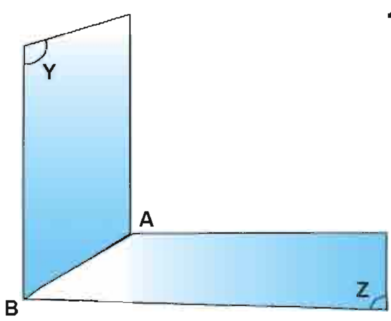
$\therefore (X) // (Y)$



ب المستويان المتقاطعان : اذا اشتركا بمستقيم واحد فقط



$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$



نلاحظ انه اذا اشترك المستويان بنقطة فانهما يشتركان بخط مستقيم يحوي جميع النقاط المشتركة بين المستوين المتقاطعين ويسمى (مستقيم التقاطع) ويكون محتوى في كليهما

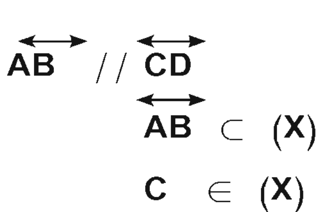
ملاحظة :

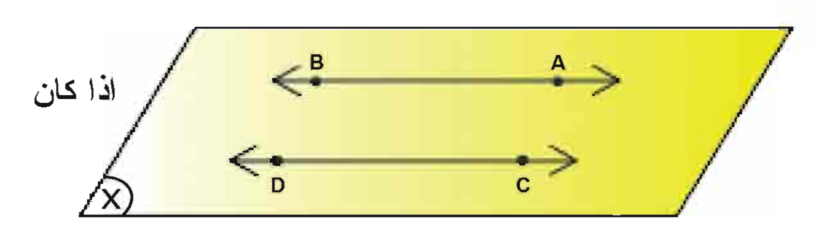
1. التساوي : إسمان لشيء واحد.
2. كل مستقيم يوازي نفسه.
3. كل مستوي يوازي نفسة.

مما تقدم نستنتج:

1 اذا توازى مستقيمان فالمستوي المار باحدهما ونقطة من الاخر فانه يحويهما

اذا كان





$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$

$C \in (X)$

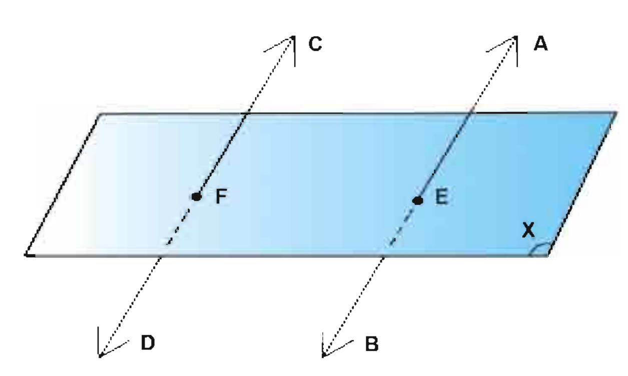
فأن $\overleftrightarrow{CD} \subset (X)$

2 المستوي الذي يقطع احد مستقيمين متوازيين يقطع الآخر.

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\overleftrightarrow{AB}$ يقطع (X) في E

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD}$ يقطع (X) في F

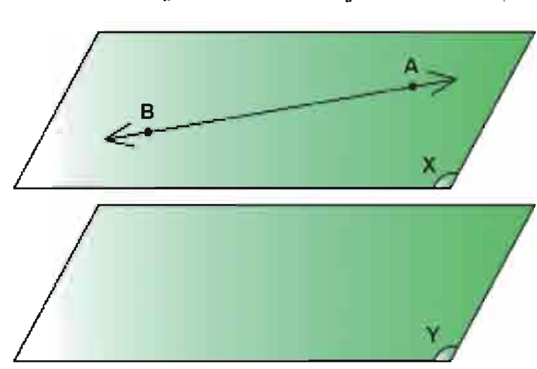


3 اذا توازى مستويان فالمستقيم المحتوى في احدهما يوازي الاخر

$(X) \parallel (Y)$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel (Y)$



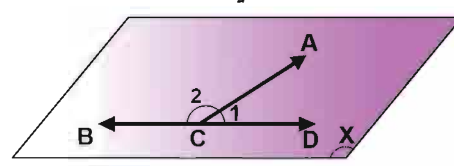
4 اذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية اخرى تساوت قياسهما او تكاملتا وتوازى مستويهما

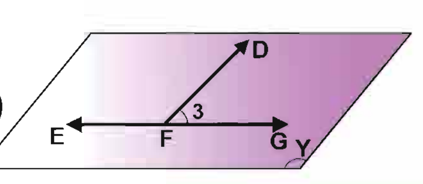
$\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DF}$

$\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{EG}$

$\therefore m\measuredangle 1 = m\measuredangle 3$

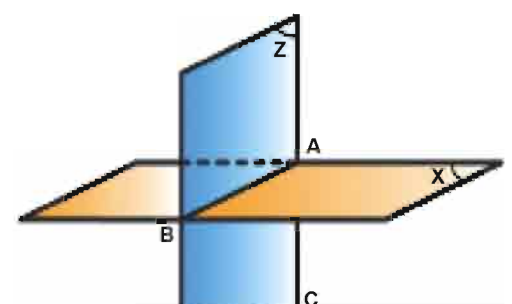
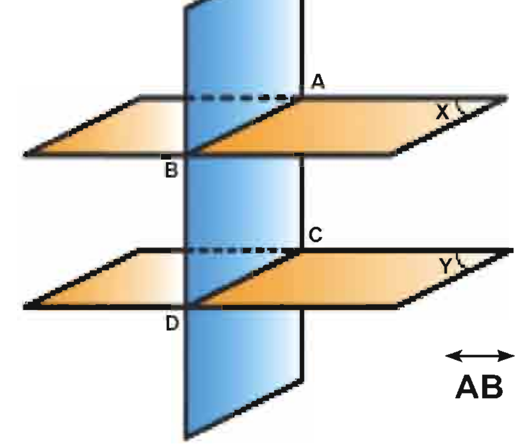
$m\measuredangle 2 + m\measuredangle 3 = 180^\circ, (x) \parallel (Y)$





[7-3] مبرهنة (1) : Theorem

خطا تقاطع مستويين متوازيين بمستوٍ ثالث متوازيين

المعطيات:

$(X) \,//\, (Y)$

$(X) \cap (Z) = \overleftrightarrow{AB}$

$(Y) \cap (Z) = \overleftrightarrow{CD}$

المطلوب اثباته : $\overleftrightarrow{CD} \,//\, \overleftrightarrow{AB}$

البرهان

$(X) \cap (Z) = \overleftrightarrow{AB}$, $(Y) \cap (Z) = \overleftrightarrow{CD}$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \subset (X)$, $\overleftrightarrow{AB} \subset (Z)$, $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$, $\overleftrightarrow{CD} \subset (Z)$ (مستقيم التقاطع يحوي جميع النقاط المشتركة بين المستويين المتقاطعين)

في (Z) اذا لم يكن $\overleftrightarrow{CD} \,//\, \overleftrightarrow{AB}$ فسوف يقطعه في نقطة مثل E

$\therefore E \in \overleftrightarrow{AB} \subset (X) \Rightarrow E \in (X)$, $E \in \overleftrightarrow{CD} \subset (Y) \Rightarrow E \in (Y)$ (مستقيم التقاطع يحوي جميع النقاط المشتركة بين المستويين المتقاطعين)

$\therefore E \in (X) \cap (Y)$ (لاشتراكهما في نقطة E)

وهذا خلاف الفرض حيث $(Y) \,//\, (X)$

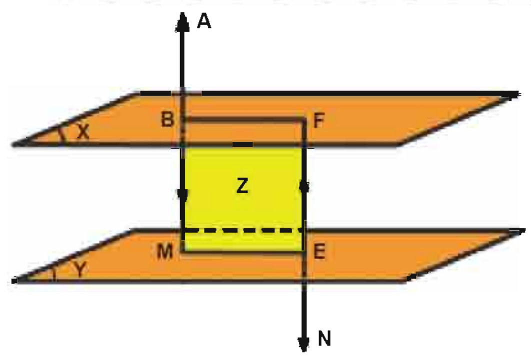
اذن $\overleftrightarrow{AB}$ لايقطع $\overleftrightarrow{CD}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$ (يتوازى المستقيمان اذا وقعا في مستو واحد وغير متقاطعين)

و . هـ . م

[7-3-1] نتيجة (1):

المستقيم الذي يقطع احد مستويين متوازيين يقطع الاخر ايضاً



المعطيات: $(Y) // (X)$, $\overleftrightarrow{AB}$ يقطع (X) في B

المطلوب اثباته: $\overleftrightarrow{AB}$ يقطع (Y)

البرهان: لتكن $E \in (Y)$

نرسم $\overleftrightarrow{EN} // \overleftrightarrow{AB}$ (يمكن رسم مستقيم موازٍ لاخر من نقطة لا تنتمي اليه)

نعين (Z) بالمستقيمين $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{AB}$ (يتعين مستو وحيد بمستقيمن متوازيين)

$\overleftrightarrow{FB} // \overleftrightarrow{EM}$ (خطا تقاطع مستويين متوازيين بمستو ثالث متوازيين)

اذن $\overleftrightarrow{AB}$ يقطع (Y) في M

و . هـ . م

[7-4] مبرهنة (2) : Theorem

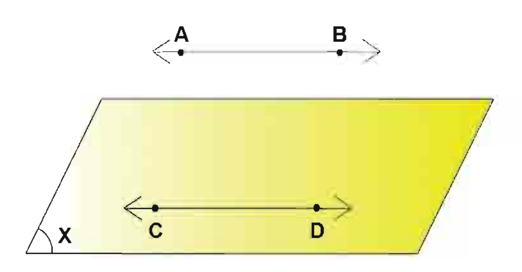
اذا توازى مستقيمان فالمستوي الذي يحوي احدهما يوازي الاخر

المعطيات:

$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{CD} \subset (X)$

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{AB} // (X)$



البرهان: اذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ لايوازي (X) فيقطعه بنقطة مثل E

$\because \overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$ (معطى)

(المستوي الذي يقطع احد مستقيمين متوازيين يقطع الاخر) $\therefore$ (X) يقطع $\overleftrightarrow{CD}$

وهذا خلاف الفرض لان(X) $\overleftrightarrow{CD} \subset$

اذن $\overleftrightarrow{AB}$ لايقطع (X)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \,//\, (X)$

و . هـ . م

[7−5] مبرهنة (3) Theorem

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث (في الفراغ) متوازيان

المعطيات :

$\overleftrightarrow{L} \,//\, \overleftrightarrow{R}$, $\overleftrightarrow{K} \,//\, \overleftrightarrow{R}$

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{L} \,//\, \overleftrightarrow{K}$

البرهان: لتكن $A \in \overleftrightarrow{K}$

بالمستقيم L ونقطة A نعين (X)

[يتعين مستو وحيد بمستقيم ونقطة لا تنتمي اليه]

ان لم يكن $\overleftrightarrow{K} \subset (X)$ فسوف يقطعه في A

$\therefore$ (X) يقطع $\overleftrightarrow{R}$ وهذا مستحيل

(المستوي الذي يقطع احد مستقيمين متوازيين يقطع الاخر)

$\therefore \overleftrightarrow{K} \subset (X)$

في (X) ان لم يكن $\overleftrightarrow{K} \,//\, \overleftrightarrow{L}$ ،فيقطعه في نقطة مثل M

ينتج وجود مستقيمين مرسومين من M يوازيان $\overleftrightarrow{R}$ وهذا خلاف الفرض (عبارة التوازي)

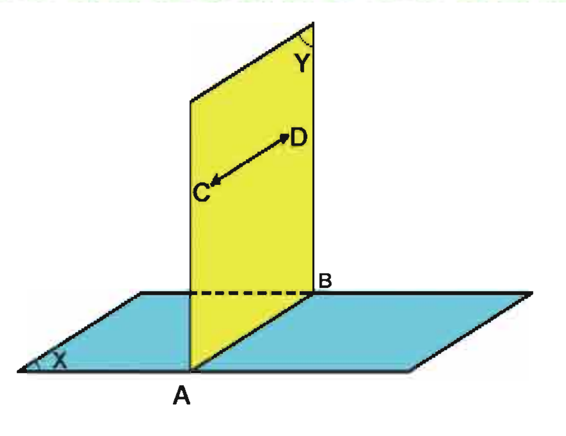
اذن $\overleftrightarrow{K}$ لايقطع $\overleftrightarrow{L}$

$\therefore \overleftrightarrow{L} \,//\, \overleftrightarrow{K}$

و . هـ . م

[7-6] مبرهنة (4): Theorem

مستقيم تقاطع مستويين يوازي كل مستقيم محتوى في احدهما ويوازي الآخر



المعطيات:

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$, $\overleftrightarrow{CD} \parallel (X)$

المطلوب اثباته:



$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

البرهان:

$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

$\overleftrightarrow{CD} \parallel (X)$ (معطى)

في (Y) لو كان $\overleftrightarrow{CD}$ يقطع $\overleftrightarrow{AB}$ لننتج ان $\overleftrightarrow{CD}$ يقطع (X)

(مستقيم التقاطع يحوي جميع النقاط المشتركة بين المستويين المتقاطعين)

وهذا خلاف الفرض حيث

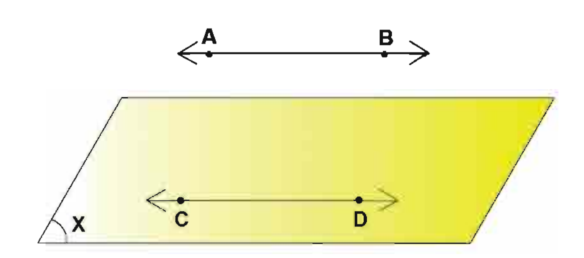
$\overleftrightarrow{CD} \parallel (X)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

و . هـ . م

[7-6-1] نتيجة (1)

اذا وازى مستقيم مستوياً معلوماً فالمستقيم المرسوم من أية نقطة من نقاط المستوي موازياً للمستقيم المعلوم يكون محتوى في المستوي



المعطيات :

$C \in (X)$, $\overleftrightarrow{AB} \,//\, (X)$

$\overleftrightarrow{CD} \,//\, \overleftrightarrow{AB}$

المطلوب اثباته

$\overleftrightarrow{CD} \subset (X)$

البرهان:

ان لم يكن $\overleftrightarrow{CD} \not\subset (X)$ فيكون قاطعاً له في نقطة C

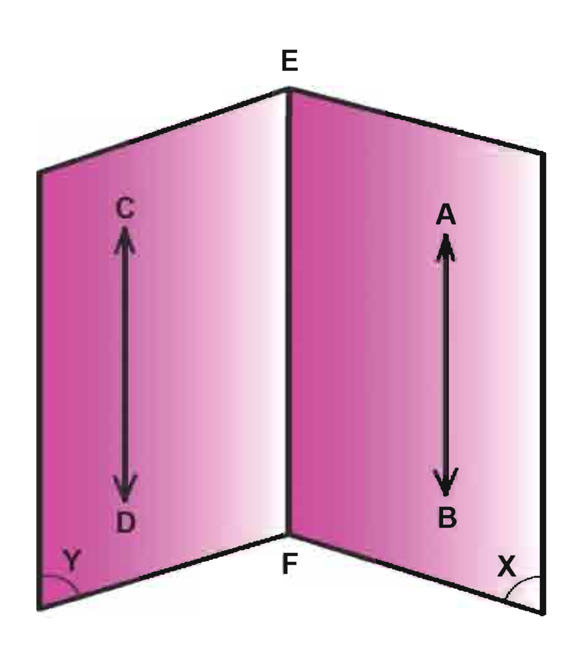
$\therefore$ (X) يقطع $\overleftrightarrow{AB}$ (المستوي الذي يقطع احد مستقيمين متوازيين يقطع الاخر)

وهذا خلاف الفرض حيث $(X) \,//\, \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore$ اذن $\overleftrightarrow{CD}$ لايقطع (X) بل محتوى فيه

و . هـ . م

مثال: اذا احتوى كل من مستويين متقاطعين على احد مستقيمين متوازيين فمستقيم التقاطع يوازي كلاً من المستقيمين المتوازيين



المعطيات :

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$, $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$, $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

المطلوب اثباته :

$\overleftrightarrow{EF} // \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$

البرهان :

$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ (معطى)

$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} // (Y)$ (اذا توازى مستقيمان فالمستوي الذي يحوي احدهما يوازي الآخر)

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{EF}$ (مبرهنة (4)مستقيم تقاطع مستويين يوازي كل مستقيم محتوى في احدهما ويوازي الآخر)

$\overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{EF}$ (المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث متوازيان)

و . هـ . م

تمارين (1-7)

1 / اي من العبارات الآتية خاطئة واي منها صائبة وبين السبب :

أ - اذا كان $\overleftrightarrow{AB} // (X)$ فيوجد مستقيم وحيد يوازي $\overleftrightarrow{AB}$ ومحتوى في (X).

ب - يوجد مستوٍ وحيد موازٍ لمستوٍ معلوم .

جـ - المستقيمان الموازيان لمستوٍ واحد متوازيان .

د - اذا وازى ضلعان من مثلث مستوياً معلوماً كان ضلعه الثالث موازياً للمستوي المعلوم .

هـ - المستقيمان المخالفان لمستقيم ثالث متخالفان .

و - اذا كان (X) ، (Y) مستويين غير متوازيين فانهما يتقاطعان بنقطة واحدة .

ز - اذا كانت $A , B \in (X)$ فان $\overleftrightarrow{AB} \cap (X) = \{ A , B \}$.

ح - كل مستقيم يمكن ان يمر به عدد غير منته من المستويات .

ط - عدد المستويات المختلفة المارة بثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة واحدة هو (3) مستويات .

ي - يوجد مستوٍ وحيد يحوي مستقيمين متخالفين .

2/ صحح ما تراه خطأ في العبارات الآتية :

أ - اذا كان $\overleftrightarrow{L} \cap (X) = \{A\}$, $\overleftrightarrow{K} \subset (X)$

فان $\{A\} = \overleftrightarrow{L} \cap \overleftrightarrow{K}$ حيث $A \in (X)$

ب - يتقاطع المستويان المختلفان في مستوٍ .

جـ - اذا كان تقاطع المستقيم L والمستوي(X) يساوي $\varnothing$ فان $(X) // \overleftrightarrow{L}$

د - اذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{L} // (X)$ فان $\overleftrightarrow{L} \cap (X) = \{A\}$ حيث $A \in (X)$

هـ - اذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{K} \subset (X)$ فان $\overleftrightarrow{K} \cap (X) = \varnothing$

و - يكون المستويان متوازيين اذا اشتركا في نقطة واحدة على الاقل .

ز - المستقيم المحتوى في احد مستويين متوازيين يقطع المستوي الآخر .

ح - يكون المستقيم محتوى في المستوي عندما يشترك معه بنقطة واحدة على الاقل.

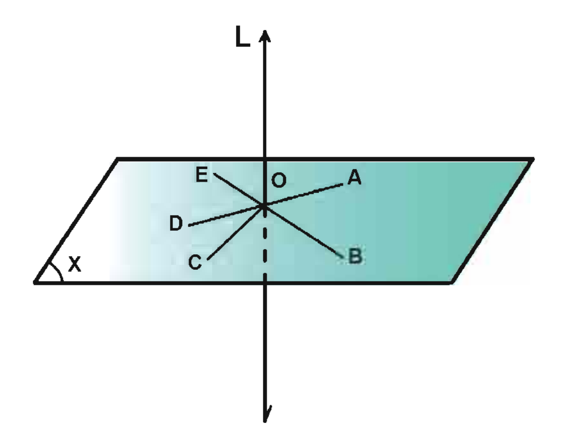
ط - اذا توازى مستقيمان ومر بكل منهما مستوٍ وتقاطع المستويان فان مستقيم تقاطعهما يقطع كلا المستقيمين .

ي - اذا قطع مستوٍ كلا من مستويين متوازيين فان خطي تقاطعه معهما يكونان متخالفين .

[7-7] تعامد المستقيمات والمستويات:

تعريف:

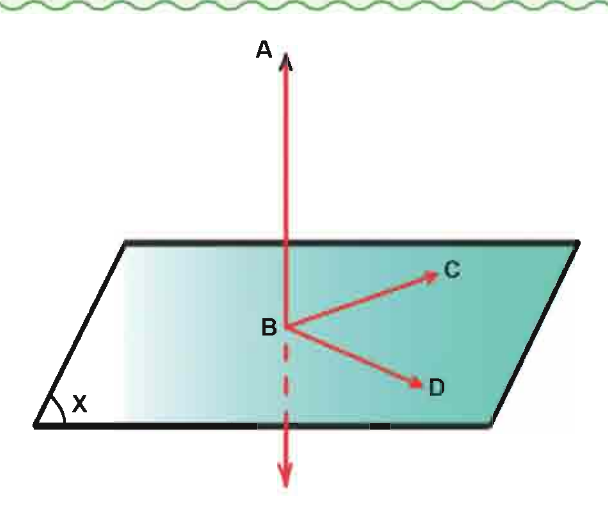
1 المستقيم العمودي على مستوٍ يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي



$\overleftrightarrow{OA}, \overleftrightarrow{OB}, \overleftrightarrow{OC}, \overleftrightarrow{OD}, \overleftrightarrow{OE}, \ldots \subset (X), \quad \overleftrightarrow{L} \perp (X)$

فيكون: $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{OA}, \overleftrightarrow{OB}, \overleftrightarrow{OC}, \overleftrightarrow{OD}, \overleftrightarrow{OE}, \ldots$

2 المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويها



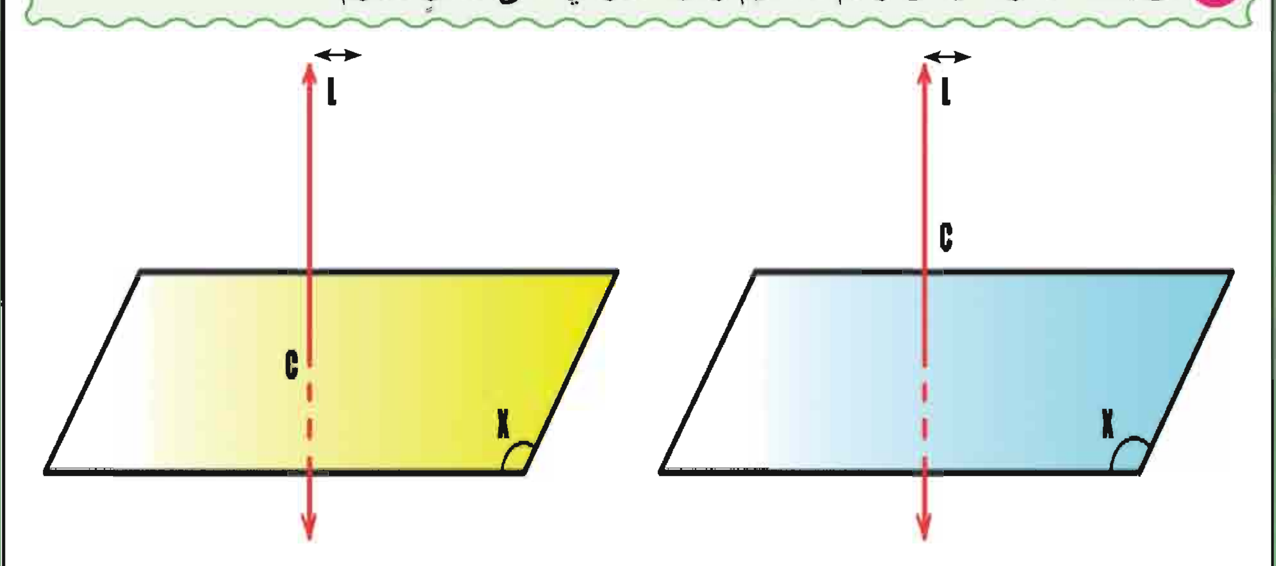
$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD} \subset (X)$

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$

فيكون: $\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$

وهو الشرط اللازم والكافي كي يكون المستقيم عمودي على المستوي.

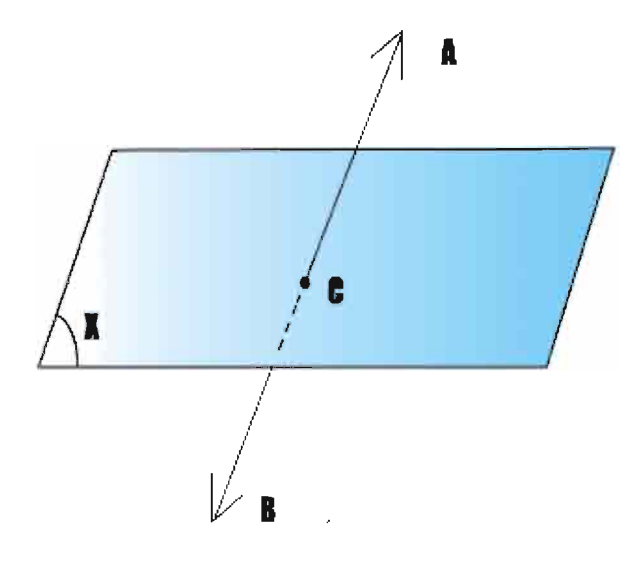
3 من نقطة معلومة يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم



c نقطة أما $c \notin (X)$ او $c \in (X)$

∴ يوجد مستقيم وحيد مثل $\overleftrightarrow{L}$ يمر من نقطة c بحيث $\overleftrightarrow{L} \perp (X)$

4 يكون المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ مائلاً على المستوي (X) اذا كان قاطعاً لهُ وغير عمودي عليه.



$\overleftrightarrow{AB} \cap (X) = \{c\}$

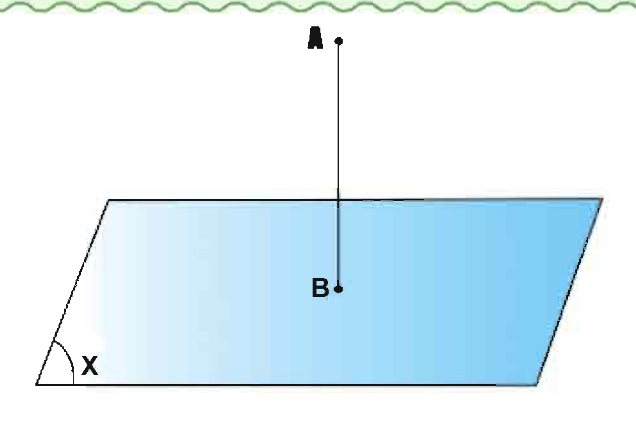
$\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي (X)

$\overleftrightarrow{AB}$ مائل على (X)

ملاحظة:

يكون $\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي على (X) اذا كان مائلاً عليه أو موازياً لهُ

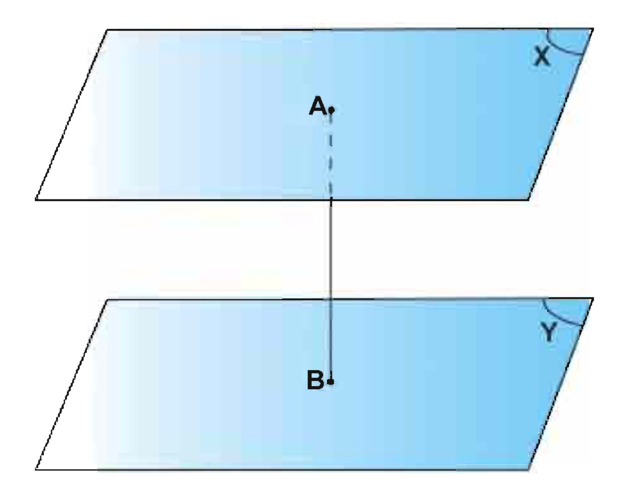
5 يقال لطول قطعة المستقيم المحددة بنقطة معلومة وأثر العمود النازل منها على المستوي المعلوم [بعد النقطة المعلومة عن المستوي]



AB هو بعد النقطة A عن (X)

وهو أقصر مسافة بين النقطة A و (X)

6 يقال لطول القطعة المستقيمة العمودية على مستويين متوازيين والمحددة بهما [البعد بين المستويين المتوازيين]



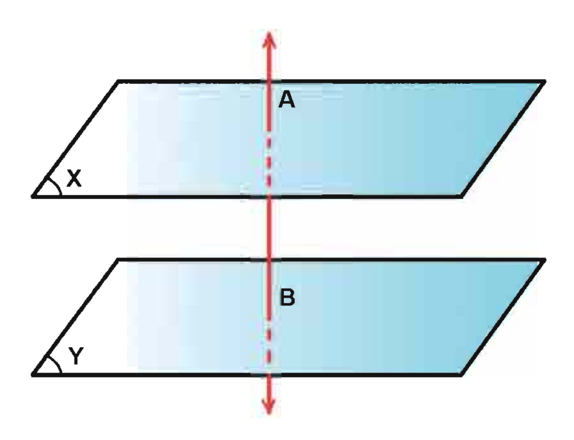
ملاحظة:

البعد بين مستويين متوازيين ثابت

اذا كان $(X) // (Y)\ ,\ \overline{AB} \perp (X)\ ,\ \overline{AB} \perp (Y)$

$\therefore$ AB يمثل البعد بين (X) ، (Y)

7 المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر



إذا كان

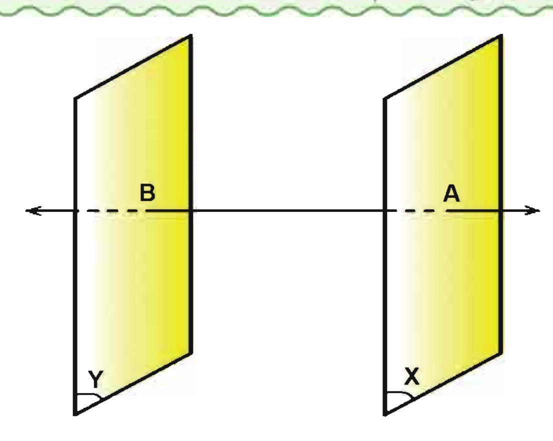
$(X) \parallel (Y)$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$

فان

$\overleftrightarrow{AB} \perp (Y)$

8 المستويان العموديان على مستقيم واحد متوازيان



إذا كان

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (Y)$

فان

$\therefore (X) \parallel (Y)$

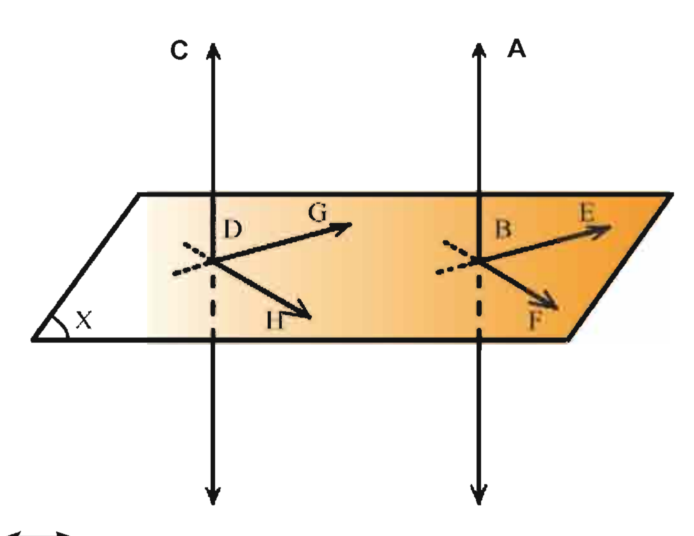
[7-8] مبرهنة (5): Theorem

المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر

المعطيات : $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$

المطلوب اثباته: $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهان:



(المستوي الذي يقطع أحد مستقيمين متوازيين يقطع الآخر) $\overleftrightarrow{CD} \cap (X) = \{D\}$

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{BF}$

ثم نرسم

$\overleftrightarrow{DG} \parallel \overleftrightarrow{BE}$

$\overleftrightarrow{DH} \parallel \overleftrightarrow{BF}$ {عبارة التوازي}

(اذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية أخرى تساوى قياسهما وتوازى مستواهما)

$\therefore m\angle ABE = m\angle CDG$

$m\angle ABF = m\angle CDH$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

(العمود على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}, \overleftrightarrow{BF}$

$\therefore m\angle ABE = m\angle CDG = 90°$

$m\angle ABF = m\angle CDH = 90°$

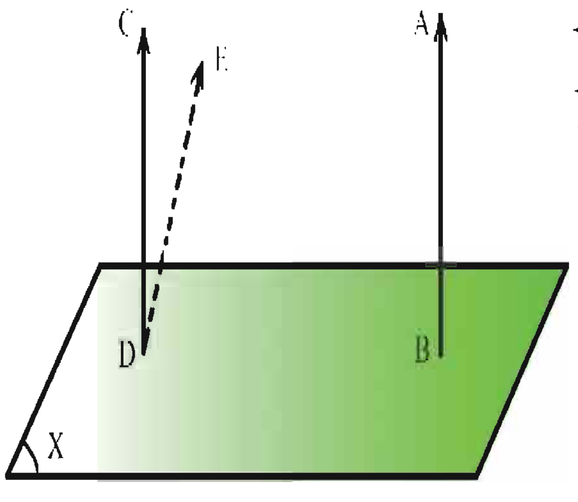
(المستقيم العمودي على مسقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويها)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

و . هـ . م

[1-8-7] نتيجة:

المستقيمان العموديان على مستو واحد متوازيان



المعطيات: $\overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

المطلوب اثباته: $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

البرهان: ان لم يكن $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$,

من $D \in (X)$ نرسم $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{DE}$

(يمكن رسم مستقيم وحيد موازٍ لاخر من نقطة لا تنتمي اليه)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{DE} \perp (X)$ (المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الاخر)

$\because \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (معطى)

أصبح من نقطة D وجود مستقيمين عموديين على (X) وهذا غير ممكن

(من نقطة معلومة يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستو معلوم)

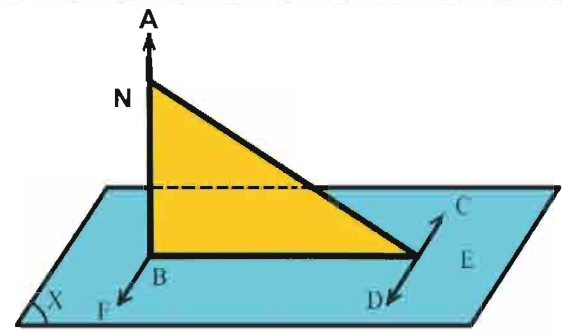
$\therefore \overleftrightarrow{DE} \equiv \overleftrightarrow{DC}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

و . هـ . م

[7-9] مبرهنة (6) Theorem

مبرهنة الاعمدة الثلاثة: اذا رسم من نقطة في مستو مستقيمان احدهما عمودي على المستوي والآخر عمودي على مستقيم معلوم في المستوي فالمستقيم الواصل بين اية نقطة من نقط المستقيم العمودي على المستوي ونقطة تلاقي المستقيمين يكون عمودياً على المستقيم المعلوم في المستوي.



المعطيات : $B \in (X)$, $\overleftrightarrow{CD} \subset (X)$, $\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$, $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$

المطلوب اثباته: $\forall\ N \in \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{NE} \perp CD$

البرهان: من نقطة B نرسم $\overleftrightarrow{BF} // \overleftrightarrow{CD}$ (عبارة توازي)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \subset (X)$ معطى

$\Rightarrow \overleftrightarrow{BF} \subset (X)$ (اذا توازى مستقيمان فالمستوي الذي يحوي أحدهما ونقطة من الآخر يحتويها)

$\because \overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (معطى)

$\Rightarrow \overleftrightarrow{BF} \perp \overleftrightarrow{BE}$ (في المستوي الواحد المستقيم العمود على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{NB} \perp \overleftrightarrow{BF}$ (المستقيم العمودي على مستو يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

$\Rightarrow \overleftrightarrow{BF} \perp (NBE)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (NBE)$ (المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

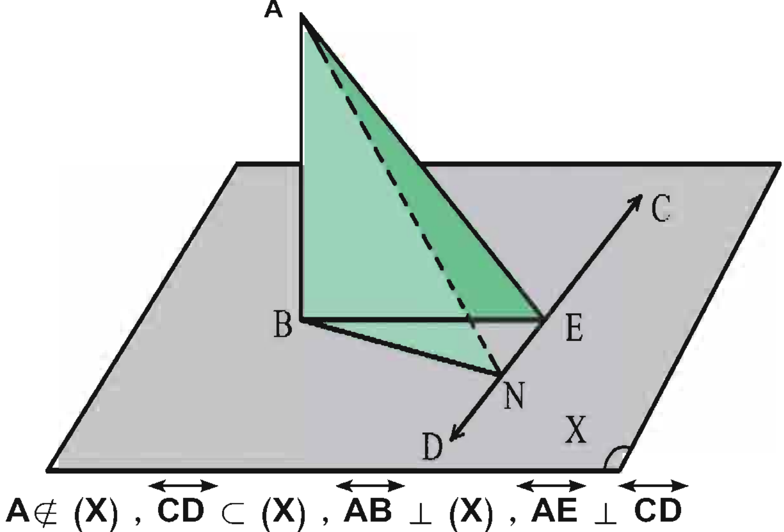
$\therefore \overleftrightarrow{EN} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (المستقيم العمودي على مستو يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

وهذا شأن كل مستقيم يصل أية نقطة من نقاط $\overleftrightarrow{AB}$ بالنقطة E يكون عمودياً على $\overleftrightarrow{CD}$

و . هـ . م

نتيجة مبرهنة (6) الاعمدة الثلاثة

اذا رسم من نقطة لا تنتمي الى مستوٍ معلوم مستقيمان احدهما عمودي على المستوي والآخر عمودي على مستقيم معلوم في المستوي. فالمستقيم الواصل بين أثري العمودين يكون عمودياً على المستقيم المعلوم في المستوي



المعطيات:

$A \notin (X)$, $\overleftrightarrow{CD} \subset (X)$, $\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$, $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{CD}$

المطلوب اثباته: $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$

البرهان: إن لم يكن $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{BE}$ من نقطة B نرسم $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{NB}$

(يمكن رسم مستقيم عمود وحيد على مستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي اليه)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

$\overleftrightarrow{AN} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AN} \equiv \overleftrightarrow{AE}$ (يمكن رسم مستقيم عمود وحيد على مستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي اليه)

$\therefore N = E$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{BE} \equiv \overleftrightarrow{BN}$

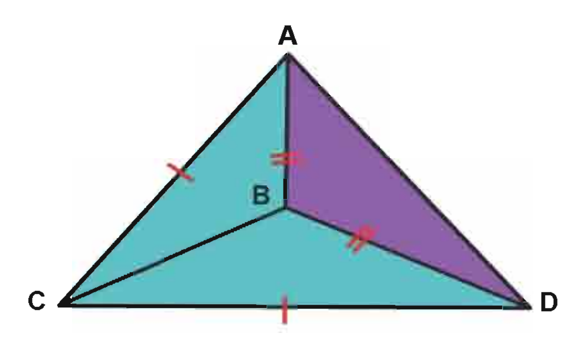
$\therefore \overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$

و . هـ . م



أمثلة محلولة

1 مثلث BCD قائم الزاوية في B , A نقطة ليست في مستوي هذا المثلث بحيث $AC = CD$,
$AB = BD$ برهن أن $\overline{BC}$ عمودي على مستوي المثلث ABD



المعطيات:

المثلث BCD قائم الزاوية في B

$A \notin (BCD)$, $AB = BD$, $AC = CD$

مطلوب اثباته: $\overline{BC} \perp (ABD)$

البرهان: المثلثان ABC , BCD

$AB = BD$ (معطى)

$AC = CD$

$\overline{BC}$ مشترك

$\therefore$ يتطابق المثلثان (لتساوي ثلاث اضلاع)

من التطابق ينتج

$m < CBD = m < ABC = 90^\circ$

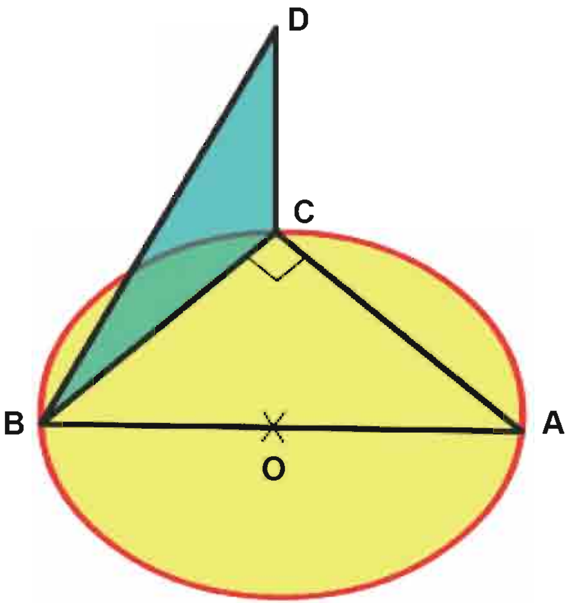
$\because \overline{BC} \perp \overline{BD}$ $(m < BCD = 90^\circ)$ معطى

$\overline{BC} \perp \overline{AB}$ $(m < ABC = 90^\circ)$ بالبرهان

$\therefore \overline{BC} \perp (ABD)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويها)

و . هـ . م

2 $\overline{AB}$ قطر في دائرة من نقطة مثل C على الدائرة رسم $\overline{CD}$ ⊥ مستوي الدائرة برهن ان $\overline{AC}$ عمودي على المستوي (BCD)



المعطيات: $\overline{AB}$ قطر دائرة ، C نقطة على الدائرة ، $\overline{CD}$ عمود على مستوي الدائرة

المطلوب اثباته: $\overline{AC} \perp (BCD)$

البرهان:

$\because$ $\overline{AB}$, قطر دائرة مركزها O (معطى)

$\therefore m\angle ACB = 90^\circ$ (الزاوية المحيطية المرسومة في نصف قطر دائرة قائمة)

$\therefore \overline{AC} \perp \overline{BC}$

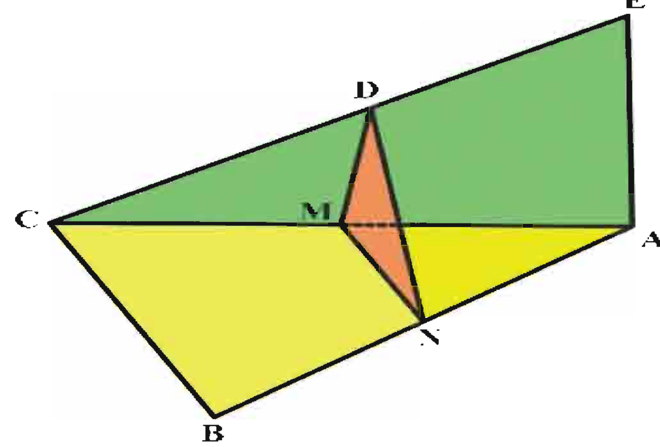
$\overline{CD} \perp (ABC)$ اي ان (معطى)

$\overline{AC} \perp \overline{CD}$ (المستقيم العمودي على مستو يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

$\overline{AC} \perp (BCD)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

و . هـ . م

3 مثلث ABC قائم الزاوية في B ، $\overline{AE} \perp (ABC)$ ، النقطة D منتصف $\overline{CE}$ النقطة N منتصف $\overline{AB}$ برهن على ان $\overline{ND} \perp \overline{AB}$



المعطيات : ABC مثلث قائم الزاوية في B ، $\overline{AE} \perp (ABC)$ ، D منتصف $\overline{CE}$ ، N منتصف $\overline{AB}$

المطلوب اثباته : $\overline{ND} \perp \overline{AB}$

البرهان : لتكن M منتصف $\overline{AC}$

$\because$ D منتصف $\overline{CE}$

N منتصف $\overline{AB}$ (معطى)

(قطعة المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعي مثلث توازي الضلع الثالث) $\overline{MD} // \overline{AE}$ ، $\overline{MN} // \overline{BC}$

$\because \overline{AE} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore \overline{MD} \perp (ABC)$

(المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الاخر)

$\because$ B زاوية قائمة (معطى)

(اذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين متقاطعين 90° فان المستقيمين متعامدين) $\Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{BC}$

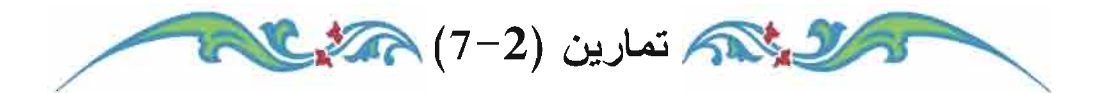
(المستقيم العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودي على الاخر) $\therefore \overline{MN} \perp \overline{AB}$

$\therefore M \in (ABC)$

$\Rightarrow \overline{MD} \perp (ABC)$, $\overline{MN} \perp \overline{AB}$, $\overline{AB} \subset (ABC)$

$\therefore \overline{AB} \perp \overline{ND}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

و . هـ . م



تمارين (2-7)

1/ ABC مثلث قائم الزاوية في B ، $AB = 4cm$ ، $BC = 3cm$
رسم $\overline{CD} \perp (ABC)$ بحيث $CD = 12cm$ جد طول AD.

2/ برهن على ان المستقيمين العموديين على مستويين متقاطعين لايتوازيان.

3/ في $\triangle ABC$ ، $m\angle A = 30^\circ$ ، $\overline{BD} \perp (ABC)$ ، $BD = 5cm$ ، $AB = 10cm$
فأذا كان $\overline{BH}$ عمودي على $\overline{AC}$ جد قياس BHD



الفصل الثامن

Chapter 8

Counting, Permutation and Combiration مبدأ العد و التباديل و التوافيق

- [8-1] مبدأ العد
- [8-1-1] رمز المضروب .
- [8-2] التباديل .
- [8-2-1] قوانين التباديل .
- [8-3] التوافيق .
- [8-3-1] قوانين التوافيق .
- [8-4] عدد طرق سحب عينة عناصرها(r) من مجموعة عدد عناصرها (n) .
- [8-5] نسبة الأحتمال .
- [8-5-1] قوانين الاحتمالات .
- [8-6]مبرهنة ذات الحدين .

المصطلح	الرمز أو العلاقة الرياضية
رمز مضروب n	$n! = n(n-1)\,(n-2) \times \ldots \times 2\times 1$
التباديل	$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$
التوافيق	$C_r^n = \frac{P_r^n}{r!}$
نسبة الإحتمال	$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$
مبرهنة ذات الحدين	$(a+b)^n$
قانون الحد العام	$P_r = C_{r-1}^n \; a^{n-r+1} \; b^{r-1}$

[8-1] مبدأ العد Counting Method

اذا أمكن إجراء عملية باحدى الطرق المختلفة عددها (m) وكان لدينا في الوقت نفسه عملية أخرى يمكن إجراؤها بطرق عددها (n) فان عدد الطرق التي يمكن بها أجراء العمليتين معاً يساوي: $m \times n$



يوجد لدى صاحب مخزن ثلاثة انواع من الدراجات الهوائية ومن كل نوع يوجد أربعة احجام ومن كل حجم يوجد ست دراجات فما عدد الدراجات؟

الحل:

عدد الدراجات = $3 \times 4 \times 6$

= 72 دراجة



كم عدد رمزه مكون من ثلاث مراتب يمكن تكوينه من مجموعة الارقام :

$\{1 , 2 , 5 , 7 , 8 , 9\}$

أ. التكرار مسموح

ب. التكرار غير مسموح

الحل:

أ. التكرار مسموح

عدد اختيارات الرقم الاول = 6

عدد اختيارات الرقم الثاني = 6

عدد اختيارات الرقم الثالث = 6

عدد الاعداد = $6 \times 6 \times 6 = 216$

ب. التكرار غير مسموح

عدد اختيارات الرقم الاول = 6

عدد اختيارات الرقم الثاني = 5

عدد اختيارات الرقم الثالث = 4

عدد الاعداد = $6 \times 5 \times 4 = 120$



مثال 3

كم عدد رمزه مكون من رقمين وأصغر من (40) يمكن تكوينه باستخدام الارقام :

{1 , 2 , 3 , 4 , 5}

أ. تكرار الرقم مسموح في العدد نفسه

ب. تكرار الرقم غير مسموح في العدد نفسه

الحل :

أ. عدد اختيارات رقم العشرات = 3

عدد اختيارات رقم الاحاد = 5

عدد الاعداد = 3 × 5 = 15

ب. عدد اختيارات رقم العشرات = 3

عدد اختيارات رقم الاحاد = 4

عدد الاعداد = 4 × 3 = 12

مثال 4

كم عدد رمزه مكون ثلاثة مراتب واكبر من 500 يمكن تكوينه من الارقام

{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 }

أ. تكرار الرقم مسموح

ب. تكرار الرقم غير مسموح

الحل :

أ. عدد اختيارات رقم المئات = 3

عدد اختيارات رقم العشرات = 7

عدد اختيارات رقم الاحاد = 7

عدد الاعداد = 3×7×7 = 147

ب. عدد اختيارات رقم المئات = 3

عدد اختيارات رقم العشرات = 6

عدد اختيارات رقم الاحاد = 5

عدد الاعداد = 3×6×5 = 90

[8-1-1] رمز المضروب

يظهر في احيان كثيرة في الرياضيات ضرب الاعداد الصحيحة الموجبة من العدد (n) حتى (1)

ويرمز له $\lfloor n = n!$ ويقرأ مضروب n

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1$$



$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

ملاحظة :

أتفق على ان :

$$1! = 1$$

وان

$$0! = 1$$



اذا كان $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$ جد قيمة (n)

الحل :

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30 \quad \therefore \quad \frac{(n+1)\,n\,(n-1)!}{(n-1)!} = 30$$

$$(n+1)\,n = 30$$

$$n^2 + n - 30 = 0$$

$$(n-5)(n+6) = 0$$

$\therefore n = 5 \quad , \quad n = -6$ يهمل لان n يجب ان تكون عدد صحيح موجب



اذا كان $n! = 5040$ فما قيمة (n) ؟

الحل :

1	5040
2	5040
3	2520
4	840
5	210
6	42
7	7
	1

$$n! = 5040$$

$$\therefore n! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$n! = 7!$$

$$\therefore n = 7$$

[8-2] التباديل (permutation)

يسمى وضع (n) من الاشياء في ترتيب معين بانه تبديل لهذه الاشياء (بشرط ان تأخذ جميع هذه الاشياء) وتقرأ تبديل (n) مأخوذ منه (r) ويرمز للتباديل

p^n_r او $p(n, r)$

[8-2-1] قوانين التباديل

1. $P^n_r = p(n, r) = n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)$

   حيث $r < n$

2. $P^n_n = n! = n(n-1)(n-2) \ldots 1$

3. $P^n_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

4. $P^n_0 = 1$



احسب p_3^8

الحل :

$$p_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8\times7\times6\times5!}{5!} = 336$$ (حسب القانون الثالث)

* وممكن حل المثال حسب القانون الاول كما يلي : –

$$p_3^8 = 8\times7\times6 = 336$$



احسب p_4^4

الحل :

$$p_4^4 = 4! = 4\times3\times2\times1 = 24$$ (حسب القانون الثاني)



احسب p_0^5

الحل :

$$p_0^5 = 1$$ (حسب القانون الرابع)

ويمكن توضيح ذلك حسب القانون الثالث

$$p_0^5 = \frac{5\,!}{(5-0)\,!} = \frac{5\,!}{5\,!} = 1$$



جد عدد التباديل للحروف أ ، ب ، جـ المأخوذة منها أثنين في كل مرة

الحل :

$$p_2^3 = 3\times2 = 6$$

مثال 5

ما عدد طرق توزيع (4) اشخاص على (4) وظائف شاغرة بحيث كل شخص له فرصة عمل متساوية مع الآخرين ؟

الحل :

$p_4^4 = 4\times3\times2\times1 = 24$ عدد الطرق



مثال 6

بكم طريقة يمكن لمجموعة من سبعة اشخاص في حفل ان يرتبوا انفسهم بحيث يجلسون في صف مستقيم به سبعة مقاعد ؟

الحل :

$p_7^7 = 7! = 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 5040$ عدد الطرق



مثال 7

جد قيمة (n) اذا كان $p_2^n = 90$

الحل :

$$p_2^n = 90$$

$$n(n-1) = 90$$

$$n^2 - n - 90 = 0$$

$$(n-10)(n+9) = 0$$

$$\Rightarrow n = 10 \quad , \quad n = -9$$ يهمل

[8-3] التوافيق Combination

هو كل مجموعة يمكن تكوينها من مجموعة من الاشياء مأخوذة كلها أو بعضها بصرف النظر عن ترتيبها ويرمز لها

$$C^n_r = \binom{n}{r} = C(n, r)$$

[8-3-1] قوانين التوافيق

1. $C^n_r = \dfrac{P^n_r}{r!}$

2. $C^n_r = \dfrac{n!}{(n-r)! \times r!}$

3. $C^n_r = C^n_{n-r}$

4. $C^n_n = C^n_0 = 1$

5. $C^n_1 = n$



أحسب كل من

1. $C_2^5 = \dfrac{5\times4}{2\times1} = 10$ حسب القانون الاول

2. $C_3^8 = \dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$



كم لجنة ثلاثية يمكن تكوينها من (6) أشخاص ؟

الحل:

$$C_3^6 = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$$



اذا كان عدد أسئلة أمتحان مادة الرياضيات هو (8) أسئلة المطلوب حل(5) أسئلة فقط. بكم طريقة يمكن الأجابة ؟

الحل:

$$C_5^8 = \frac{8\times7\times6\times5\times4}{5\times4\times3\times2\times1} = 56$$



بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من ثلاثة رجال وسيدتين من بين (7) رجال و (5) سيدات ؟

الحل:

يمكن اختيار ثلاثة رجال من بين سبعة رجال بطرق عددها C_3^7 ويمكن اختيار السيدتين من بين خمسة سيدات بطرق عددها C_2^5 أذن اختيار اللجنة بطرق عددها

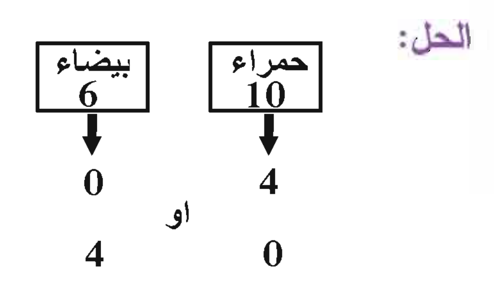
$$C_3^7 \times C_2^5 = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} \times \frac{5\times4}{2\times1} = 350$$

نساء 5	رجال 7
↓	↓
2	3
C_2^5	C_2^7

مثال 5

كيس فيه (10) كرات حمراء و (6) كرات بيضاء سحبت منه (4) كرات معاً. ما عدد الطرق التي تكون فيها الكرات المسحوبة من نفس اللون ؟

الحل:



$$C_4^{10} + C_4^{6} = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} + \frac{6\times5\times4\times3}{4\times3\times2\times1}$$

عدد الطرق $= 210 + 15 = 225$

مثال 6

اثبت ان :

$$\binom{70}{3} = \binom{70}{67}$$

الحل: حسب القانون الثالث

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\therefore \binom{70}{3} = \binom{70}{70-3}$$

$$= \binom{70}{67}$$

مثال 7

جد قيمة (n) اذا كان $C_2^n = 55$

الحل:

$$C_2^n = \frac{n\,(n-1)}{2\times 1}$$

$$\therefore \frac{n\,(n-1)}{2} = 55$$

$$n\,(n-1) = 110$$

$$n^2 - n - 110 = 0$$

$$(n-11)\,(n+10) = 0$$

$\Rightarrow n = 11 \quad , \quad n = -10$ يهمل

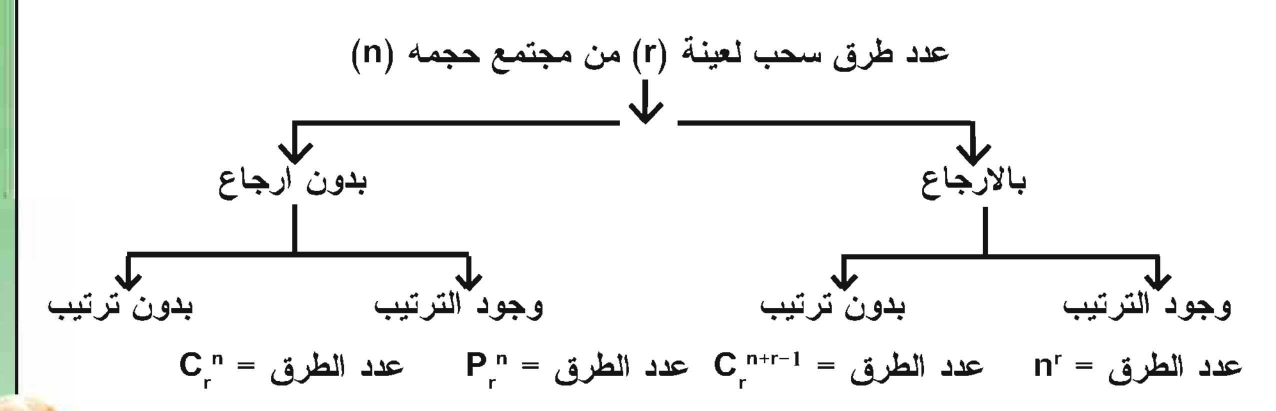
[4-8] عدد طرق سحب عينة عددعناصرها (r) من مجموعة عدد عناصرها (n)
حيث $r \le n$ ، $n \ge 1$, $n \in N^+$

ملاحظة :

عند السحب يجب مراعاة الآتي :

1. السحب بالارجاع يعني ان كل عينة تسحب تعاد الى المجموعة الاصلية قبل الشروع بسحب عينة اخرى.
2. السحب بدون أرجاع: يعني ان العينة التي تسحب لا تُعاد مره اخرى الى المجموعة الأصلية.

والمخطط الآتي يوضح عملية السحب :-



ملاحظة:

اذا لم تذكر طريقة السحب فتعتبر دون أرجاع ولا وجود للترتيب

مثال 8

بكم طريقة يمكن سحب (3) كرات من وعاء به (7) كرات

أ. مع الارجاع ومراعاة الترتيب

ب. مع الارجاع وعدم الترتيب

جـ. دون أرجاع ومراعاة الترتيب

د. دون أرجاع وعدم مراعاة الترتيب

الحل:

أ. عدد الطرق

$$n^r = 7^3 = 7\times7\times7 = 343$$

ب. عدد الطرق

$$C_r^{n+r-1} = C_3^{7+3-1} = C_3^{9} = \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 84$$

جـ. عدد الطرق

$$P_3^{7} = 7\times6\times5 = 210$$

د. عدد الطرق

$$C_3^{7} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$$

تمارين (1-8)

1. في معرض للسيارات توجد (5) أنواع من السيارات ومن كل نوع (3) نماذج ومن كل نموذج توجد (4) سيارات فما عدد السيارات في المعرض ؟

2. كم عدد زوجي يمكن تكوينه من أربع مراتب مأخوذة من الارقام { 5,1,6,2,7,4,8 }
   - أ. التكرار مسموح به في العدد نفسه .
   - ب. التكرار غير مسموح به في العدد نفسه .

3. صندوق يحتوي على عشرة مصابيح (4) منها عاطلة سحبت ثلاثة مصابيح جد عدد طرق سحب
   - أ. أثنان صالحة وواحد عاطل .
   - ب. على الاقل مصباح صالح.

4. اذا كان عدد أسئلة أمتحان مادة ما هو (8) أسئلة وكان المطلوب حل خمسة أسئلة منها فقط بشرط أن تكون ثلاثة منها من الاسئلة الاربعة الاولى. فبكم طريقة يمكن الاجابة؟

5. ما عدد الطرق لاختيار فريق لكرة الطائرة من (6) لاعبين من بين (11) لاعب. [الاختيار دون أرجاع وعدم مراعاة الترتيب]

6. كم طريقة يمكن أختيار لجنة مؤلفة من خمسة أشخاص على شرط ان تحتوي على (3) طلاب و (2) طالبة من بين (7) طلاب و (6) طالبات
   - أ. أستبعاد أحد الطلاب من اللجنة
   - ب. احدى الطالبات لا يحق لها المشاركة في اللجنة.

7. جد قيمة (n) اذا كان

   1. $P_2^n = 72$ 2. $\binom{n}{2} = 10$ 3. $2\binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$

8. كم عدد رمزه مكون من ثلاثة مراتب واصغر من 600 يمكن تكوينه من الارقام {5 , 3 , 6 , 2 , 7 , 9}
   - أ. يسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه.
   - ب. لا يسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه.

9. اذا كان $x = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9\}$ فكم عدد رمزه مكون من (5) أرقام مختلفة يمكن تكوينه من عناصر x؟

الاحتمال Probability

نبذة تأريخية :-

في منتصف القرن السابع عشر ومن خلال الابحاث التي قام بها كل من باسكال (pascal) وفيرمات (Fermat) عند دراستهم لأرقام معينة في عالم المراهنة نشأت ((نظرية الاحتمالات)) واصبحت الأن تكتسب اهمية كبيرة في مجالات متعددة مثل الارصاد الجوية ، العلوم الهندسية ، التأمين ، الطب الحيوي حيث نظرية الوراثة تعتبر افضل تطبيق لنظرية الاحتمالات في هذا المجال والتي جاءت عن طريق (العالم مندل) .

بعض المفاهيم الاساسية :

1 - التجربة (Experiment) : هو القيام بفعل معين ثم ملاحظة جميع ما ينتج عن هذا الفعل .

2 - التجربة العشوائية (Random Experiment) : وهي التجربة التي تحقق الشرطين التالين:-

أ. يمكن لنا ان نصف جميع نواتج التجربة قبل وقوعها

ب. لا يمكن تحديد اي من النواتج ، يمكن ان يتحقق فعلاً في حالة حدوث التجربة

مثال 1

رمي حجر النرد (Dice) مرة واحدة وملاحظة الوجه الظاهري ، نعلم مسبقاً ان الوجه الظاهري في الرمية سيكون احد الارقام 1,2,3,4,5,6 اي يمكن تحديد جميع النتائج الممكنة لكن من غير الممكن تحديد النتيجة بعينها لذا سميت هذه التجربة بالتجربة العشوائية

فضاء العينة sample spaces

فضاء العينة في تجربة عشوائية هو جميع النتائج الممكنة لهذه التجربة ويرمز له S

يرمز الى عدد عناصر الفضاء بالرمز n (s)

ففي المثال الاول السابق

فضاء العينة $s = \{1,2,3,4,5,6\}$

عدد عناصر الفضاء $n(s) = 6$

الحدث (Event)

هو مجموعة جزئية من فضاء العينة , A حدث من فضاء العينة S $\Leftrightarrow$ $A \subseteq S$

الاحداث الشاملة

لتكن A , B , C أحداث من فضاء العينة S يقال لهذه الاحداث شاملة اذا حققت الشروط التالية:

1. اتحاد الاحداث = S فضاء العينة
2. تقاطعها مثنى مثنى (كل اثنين منهما) = $\varnothing$
3. كل مجموعة منها ليست خالية

مثال 2

ليكن $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ ناخذ بعض الاحداث من

$A_1=\{4,1\}$ حدث مركب (Compound Event)

لان عدد عناصره اكبر من (1)

$A_2=\{3\}$ حدث بسيط (Simple Event)

لان عدد عناصره =1

$A_3=\{6\}$ بسيط

$A_4=\{1,2,3,4,5\}$ مركب

A_5 = عدد يقبل القسمة على 2,5 في نفس الوقت $\Leftarrow$ $A_5=\varnothing$

A_5 = حدث مستحيل (Impossible Event)

$A_6=\{5,2\}$ مركب

$A_7=\{6,5,3,2\}$ مركب

$A_8=\{1,3,4,2,5,6\}$ حدث مؤكد (Sure Event) لان $A_8=S$

نلاحظ A_1,A_7 احداث شاملة من S

العمليات على الحوادث

1. $S \supseteq A$ معناه A حدث من S
2. $\varnothing$ تسمى بالحدث المستحيل (الحدث الذي لا يمكن وقوعه)
3. S فضاء العينة = الحدث المؤكد ((يقع دائماً))
4. $A^c = S - A$ يسمى الحدث المكمل للحدث A (او عدم وقوع الحدث A)

   A^c = Complement Event
5. $A \cup B$ يعني حدث وقوع الحدث A أو B اي حدث وقوع احد الحدثين على الاقل .
6. $A \cap B$ يعني حدث وقوع الحدث A و B اي حدث وقوع الحدثين معاً
7. $B \supseteq A$ يعني حدث وقوع الحدث A يستلزم وقوع الحدث B
8. $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow$ A ، B حدثين متنافيين Mutually Exclusive Events
9. الحدث الذي يتكون من عنصر واحد يسمى حدث بسيط.
10. الحدث الذي يتكون من عنصرين او اكثر يسمى حدث مركب.

ملاحظة :

اذا كانت تجربة مركبة من تجربتين متتاليتين وكان فضاء العينة الاولى s_1 والثانية s_2 فأن

1. فضاء العينة للتجربة المركبة = $s_1 \times s_2$ (حاصل ضرب ديكارتي)
2. $n(s) = n(s_1) \times n(s_2)$ ((مبدأ العد))

مثال 3

التجربة : القاء حجر نرد ثم قطعة نقود ثم حجر نرد مرة اخرى التجربة هنا مركبة من التجارب الثلاث الاتية :

الحل:

$s_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$ حجر النرد الاول

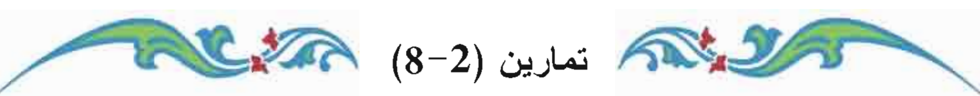
$S_2 = \{H,T\}$ حيث الصورة = H (Head) ، الكتابة = T (Tail)

$s_3 = \{1,2,3,4,5,6\}$ حجر النرد الثاني

فأن $s = s_1 \times s_2 \times s_3$ (يمثل فضاء العينة للتجربة المركبة)

$\therefore$ عدد عناصر فضاء العينة للتجربة المركبة $n(s) = n(s_1) \times n(s_2) \times n(s_3)$

$n(s) = 6 \times 2 \times 6 = 72$ ثلاثي مرتب



تمارين (2-8)

1. رمينا حجرين من احجار النرد جد

أ. عدد عناصر فضاء العينة $n(s)$.

ب. اكتب فضاء العينة s .

جـ. اكتب الحدث الذي قيمة مجموع العددين على وجهي الحجرين اكبر او يساوي 9 .

د. اكتب الحدث الذي قيمة مجموع العددين على وجهي الحجرين يقبل القسمة على 6 بدون باقٍ

هـ. اكتب الحدث الذي قيمة العدد الذي على وجه احد الاحجار ضعف العدد الذي على وجه الحجر الاخر .

2. من رمي حجر نرد مرة واحدة اكتب الاحداث الاتية ثم بين اي الحدثين منهما متنافيين

أ. الحدث ظهور عدد اولي

ب. الحدث ظهور عدد زوجي

جـ. الحدث ظهور عدد فردي

3. رميت ثلاث قطع نقود مرة واحدة

أ. صف فضاء العينة

ب. جد الحدث وجه واحد على الاقل صورة (H)

جـ. ظهور على الاكثر كتابة (T)

تعريف :

ليكن A حدث من s حيث s فضاء ذي احتمالات متساوية فضاء منتظم uniform spaces

[8-5] نسبة الاحتمال Probability Ratio

الاحتمال = P

نسبة احتمال حدوث الحدث A = عدد عناصر A / عدد عناصر الفضاء

$$p(A) = n(A) / n(s)$$

[8-5-1] قوانين الاحتمالات :

ليكن كل من A,B حدثين من s

1. $o \leq p(A) \leq 1$ حيث

$P(A) = 0$ اذا كان A حدثاً مستحيلاً

$P(A) = 1$ اذا كان A حدثاً مؤكداً

اي ان نسبة احتمال اي حدث تنتمي للفترة المغلقة $[0,1]$

2. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ حدثان مستقلان (احتمال حدوث اي منهما لا يشترط حدوث الاخر)

3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

اذا كان $A \cap B = \varnothing$ يكون :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4. $P(A) + P(A^c) = 1$

اي: $P(A^c) = 1 - P(A)$

مثال 1

اقراص مرقمة من 10 الى 21 سحب منها قرص واحد جد نسبة احتمال ان هذا القرص يحمل عدد زوجياً او عدد يقبل القسمة على (3) بدون باقٍ

الحل :

$S = \{ 10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20, 21\}$

$n(s) = 21 - 10 + 1 = 12$ ويمكن عدها

$n(A) = 6 \Leftarrow$ ليكن A حدث يحمل عدداً زوجياً

$P(A) = n(A) / n(s) = 6/12$

ليكن B حدث للعدد يقبل القسمة على 3 بدون باقٍ

$B = \{12,15,18,21\}$

$P(B) = n(B) / n(s) = 4/12$

$A \cap B = \{ 12,18 \} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{12}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 6/12 + 4/12 - 2/12 = 8/12 = 2/3$

مثال 2

شركة افرادها هم 60 رجلاً و 20 امرأة ، من الرجال 35 رجل متزوج ومن النسوة 12 متزوجة من هذه الشركة اختير شخص واحد عشوائياً جد احتمال ان يكون :

1. هذا الشخص رجل
2. هذا الشخص امرأة غير متزوجة

الحل :

1. ليكن A الحدث ((الشخص رجل))

$n(s) = 60 + 20 = 80$

$P(A) = 60 / 80 = 3/4$

2. ليكن B الحدث ((الشخص امرأة غير متزوجة))

$P(B) = 8 / 80 = 1/10$



القينا حجري نرد متمايزين مرة واحدة جد احتمال ان يكون مجموع العددين على الوجهين الظاهرين يساوي 10 او مجموع العددين على الوجهين الظاهرين 9

الحل :

$n(s) = 6 \times 6 = 36$

ليكن A = الحدث : مجموع العددين على الوجهين الظاهرين = 10

$A = \{(5,5) , (4,6) , (6,4)\} \Rightarrow n(A) = 3$

$P(A) = n(A) / n(s) = 3 / 36$

ليكن B = الحدث : مجموع العددين على الوجهين الظاهرين = 9

$B = \{(4,5) , (5,4) , (3,6) , (6,3)\} \Rightarrow n(B) = 4$

$P(B) = 4 / 36$ ، $A \cap B = \varnothing$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$= 3 / 36 + 4 / 36 = 7 / 36$

مثال 4

رمينا حجري متمايزين من احجار النرد مرة واحدة ما احتمال ان يكون العدد علي وجه احد الحجرين هو ضعف العدد على الوجه الاخر أو العددين على الوجهين الظاهرين مجموعهما = 6

الحل :

لتكن A = الحدث: العدد على الوجه الظاهري لأحد الحجرين ضعف العدد على الوجه الآخر

$A = \{(3,6) , (6,3) , (2,4) , (4,2) , (1,2) , (2,1)\}$

$n(A) = 6$

$P(A) = n(A) / n(s) = 6 / 36$

ليكن B = الحدث : مجموع العددين على الوجهين = 6

$B = \{(3,3) , (2,4) , (4,2) , (1,5) , (5,1)\}$

$P(B) = n(B) / n(s) = 5/ 36$

$A \cap B = \{(2 , 4) , (4 , 2)\}$

$P(A \cap B) = 2/36$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{6}{36} + \frac{5}{36} - \frac{2}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

مثال 5

ليكن احتمال نجاح طالب في امتحان الرياضيات هو 90 % وليكن احتمال نجاح طالب اخر في الرياضيات هو 70 % جد نسبة احتمال نجاحهما معاً في أمتحان الرياضيات .

الحل :

ليكن P(A) نسبة احتمال نجاح طالب الاول في الرياضيات

$\therefore P(A) = 0.90$

ليكن P(B) نسبة احتمال نجاح طالب اخر في الرياضيات

$\therefore P(B) = 0.70$

من الواضح ان B , A حدثين مستقلين (لان نجاح احدهما لا يتأثر بنجاح الاخر)

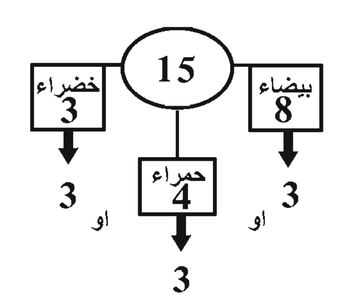
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$= 0.90 \times 0.70 = 0.63$

مثال 6

صندوق يحتوي 8 اقراص بيضاء ، 4 اقراص حمراء ، 3 اقراص خضراء سحبنا (3) اقراص مرة واحدة جد نسبة احتمال الاقراص المسحوبة من نفس اللون

الحل:



$n = 8+4+3 = 15$

$r = 3$

$P = \left(C_3^8 + C_3^4 + C_3^3\right) / C_3^{15}$

$= \dfrac{61}{455}$

مثال 7

يراد تكوين لجنة من 5 أشخاص من بين 8 طلاب و 6 طالبات

1. جد نسبة احتمال اللجنة جميعها من الطلاب
2. جد نسبة احتمال اللجنة جميعها من الطالبات

الحل :

$n(s) = C_5^{14}$

1. نفرض نسبة احتمال اللجنة جميعها طلاب =(P(A

$P(A) = C_5^8 / C_5^{14} = 8\times7\times6\times5\times4/14\times13\times12\times11\times10 = \dfrac{4}{143}$

2. نفرض نسبة احتمال اللجنة جميعها طالبات =(P(B

$P(B) = C_5^6 / C_5^{14} = 6\times5\times4\times3\times2/14\times13\times12\times11\times10 = \dfrac{3}{281}$

تمارين (3-8)

1. صندوق يحتوي ثلاث كرات بيضاء مرقمة بالارقام من 1 ، 2 ، 3 وكرتين سوداويتين مرقمتين 1 ، 2 إذا علمت أن الكرات متماثلة بالحجم سحبت كرة واحدة جد احتمال

أ. الكرة سوداء. ب. الكرة بيضاء. جـ. الكرة بيضاء وتحمل رقم فردي

2. رميت حجرين متمايزين من أحجار النرد:

أ. ماهو أحتمال العددين الظاهرين مجموعهما 6

ب. ماهو أحتمال الحصول على مجموع 7 او مجموع 11

3. صندوقان يحتوي كل منهما على 6 كرات بيضاء و 4 حمراء، جد نسبة احتمال سحب 3 كرات بيضاء من الصندوق الاول، وسحب كرتين بيضاويتين وكرة حمراء من الصندوق الثاني.

4. لدينا 5 بطاقات مرقمة من 1 الى 5 سحبت بطاقة واحدة جد نسبة احتمال البطاقة لا تحمل رقم 3.

5. كيس يحتوي على 20 كرة متجانسة في جميع عناصرها مرقمة من1 ... 20 سحبت كرة واحدة. جد:

أ. احتمال العدد الذي تحمله الكرة عدداً اصغر من 9.

ب. احتمال العدد الذي تحمله الكرة عدداً اكبر من 5.

6. صندوق يحتوي على 21 قرص مرقم من 1 ... 21 سحب قرصان جد نسبة احتمال:

أ. القرصان زوجيان.

ب. الاول زوجي والآخر فردي.

7. لدينا 50 بطاقة مرقمة من 1 ... 50 جد احتمال العدد على البطاقة المسحوبة:

أ. يقبل القسمة على 5.

ب. يقبل القسمة على 7.

جـ. يقبل القسمة على 5 أو 7

8. يراد اختيار لجنة طلابية تتكون من ثلاث اشخاص بين 12 طالب و 4 طالبات. ما احتمال كل مما يأتي:

أ. ان تكون اللجنة جميعها طلاب.

ب. ان يكون في اللجنة طالب واحد فقط.

9. رميت حجري نرد متمايزان مرة واحدة ما احتمال ان يكون مجموع العددين الظاهرين 9 أو يساوي 11

[8 −6] مبرهنة ذات الحدين Binomial Theorem

مبرهنة ذات الحدين : هي قانون لايجاد ما يساوي أي مقدار ذي حدين مثل (a+b) إذا رفع الى أي اس بدون إجراء عملية الضرب إذا كان الاس عدداً صحيحاً موجباً.

اذا كان a,b عددين حقيقيين و n عدداً صحيحاً موجباً

(1) $(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 + \dots + c_n^n b^n$

(2) $(a-b)^n = C_0^n a^n - C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 - \dots + C_n^n (-b)^n$

نلاحظ ان حدود هذا المفكوك تكون سالبة او موجبة على التعاقب ويكون الحد الاخير موجباً إذا كانت n زوجية وسالبة إذا كانت n فردية .

ملاحظات :

1) عدد حدود المفكوك = n+1
2) أس الحد الاول واس الحد الاخير = n
3) مجموع أسس الرموز المكونة للحد = n
4) أس الحد الاول يبدأ بالتناقص من n الى 0
إس الحد الثاني يتزايد من 0 الى n
5) اذا كان n عدد زوجي فان عدد حدود المفكوك يكون فردي ورتبة الحد الاوسط $\frac{n}{2}+1$
6) اذا كان n عدد فردي فان عدد حدود المفكوك يكون زوجي لذا فان رتبة الحدين الاوسطين $\frac{n+3}{2} , \frac{n+1}{2}$ أو $\frac{n+1}{2} + 1 , \frac{n+1}{2}$

مثال 1

اوجد مفكوك $(a+b)^5$

$$(a+b)^5 = C_0^n a^5 + C_1^n a^4 b + C_2^n a^3 b^2 + C_3^n a^2 b^3 + C_4^n a b^4 + C_5^n b^5$$
$$= a^5 + 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + b^5$$

مثال 2

اوجد قيمة $(101)^3$

$$(101)^3 = (1+100)^3 = 1 + C_1^3\, 100 + C_2^3 (100)^2 + C_3^3 (100)^3$$
$$= 1 + 300 + 30\,000 + 1000\,000$$
$$= 1030301$$

اذا كان مفكوك $(a+b)^n$ فان :

قانون الحد العام $P_r = c^n_{r-1} \; a^{n-r+1} \; b^{r-1}$



مثال 3

جد الحد الخامس في مفكوك $(a+b)^{10}$

الحل :

$P_r = c^n_{r-1} \quad a^{n-r+1} \quad b^{r-1}$

$P_5 = c^{10}_{5-1} \quad a^{10-5+1} \quad b^{5-1}$

$$= \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} \quad a^6 \quad b^4$$

$= 210\ a^6\ b^4$



مثال 4

برهن إن مفكوك $(x^2+2/x^3)^{10}$ يحتوي على الحد الذي فيه x^{15} ثم جد معامله

الحل :

$P_r = c^n_{r-1} \quad a^{n-r+1} \quad b^{r-1}$

$P_r = c^{10}_{r-1} \quad (x^2)^{10-r+1} \ . \ (2/x^3)^{r-1}$

$x^{15} = (x^2)^{11-r} \quad (x^{-3})^{r-1}$

$x^{15} = (x^{22-2r}) \quad (x^{-3r+3})$

$x^{15} = x^{25-5r} \Rightarrow 15 = 25-5r \Rightarrow 5r = 10 \Rightarrow r=2$

$P_2 = c^{10}_1 \quad (x^2)^{10-2+1} \ .(2/x^3)^{2-1}$

$P_2 = 10(x^{18}) \quad (2/x^3) = 20 \quad x^{15}$

P_2 معامل 20



مثال 5

اثبت انه لا يوجد حد خالٍ من (x) في مفكوك $(5x - 4/x^2)^{19}$

الحل:

$P_r = c^n_{r-1} \quad a^{n-r+1} \quad b^{r-1}$

$P_r = c^{19}_{r-1} \quad (5x)^{19-r+1} \ . \ (-4/x^2)^{r-1}$

$x^0 = (x)^{20-r} \quad (x)^{-2r+2}$

$x^0 = x^{22-3r}$

$0 = 22-3r \Rightarrow r = 22/3 \Rightarrow r \notin Z^+$

$\therefore$ لا يوجد حد خالٍ من x



مثال 6

اوجد الحدين الاوسطين في مفكوك $(3x/2 - 2/3x)^7$

الحل : رتبتا الحدين الاوسطين هما :

$$\frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$$

$$\frac{n+3}{2} = \frac{7+3}{2} = 5$$

الحدان الاوسطان هما الرابع والخامس

$P_r = c^n_{r-1} \quad a^{n-r+1} \quad b^{r-1}$

$P_4 = c^7_3 \quad (3x/2)^4 \quad (-2/3x)^3$

$$= \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} \left(\frac{81x^4}{16}\right)\left(\frac{-8}{27x^3}\right) = -\frac{105}{2}\ x$$

$P_5 = c^7_4 \quad (3x/2)^3 \quad (-2/3x)^4$

$$= \frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1} \left(\frac{27x^3}{8}\right)\left(\frac{16}{81x^4}\right) = \frac{70}{3x}$$

مثال 7

اذا كانت النسبة بين الحدين الخامس، والعاشر في مفكوك $(1+x)^{12}$ تساوي $8/27$ جد قيمة x

الحل:

$P_r = c^n_{r-1} \quad a^{n-r+1} \quad b^{r-1}$

$P_5 = c^{12}_4 \quad x^4$

$P_{10} = c^{12}_9 \quad x^9 = c^{12}_3 \quad x^9$

$c^{12}_4 \quad x^4 / c^{12}_3 \quad x^9 = 8 / 27$

$$\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1} \times \frac{3\times2\times1}{12\times11\times10\ x^5} = \frac{8}{27}$$

$$9/4x^5 = 8/27 \Rightarrow x^5 = 9\times27/4\times8 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$



اختصر المقدار $(2+x)^4 + (2-x)^4$ الى ابسط صورة ثم جد القيمة للمقدار

$(2+\sqrt{3})^4 + (2-\sqrt{3})^4$

الحل :

$(2+x)^4 + (2-x)^4 =$ ضعف الحدود الفردية في مفكوك $(2+x)^4$

$= 2\,[P_1+P_3+P_5]$

$= 2\,[2^4+c^4_2(2)^2(x)^2+x^4]$

$= 2\,[16+24x^2+x^4]$

نضع $x=\sqrt{3}$

$= 2\,[16+24\times3+9] \quad = 2\times97 = 194$

مثال 9

اختصر المقدار $(x+\frac{1}{x})^5 - (x-\frac{1}{x})^5$ ثم اوجد قيمة

$(2\,\frac{1}{2})^5 - (1\,\frac{1}{2})^5$

الحل :

$(x+\frac{1}{x})^5 - (x-\frac{1}{x})^5 =$ ضعف الحدود الزوجية في مفكوك $(x+\frac{1}{x})^5$

$= 2\,[P_2+P_4+P_6]$

$= 2\,[c^5_1\,x^4(1/x)+c^5_3\,x^2(1/x)^3 + c^5_5\,(1/x)^5\,]$

$= 2\,[5x^3+10/x+1/x^5]$

نضع $x = 2$

$= (2+\frac{1}{2})^5 - (1+\frac{1}{2})^5 = 2\,[5\times2^3+(10/2)+(1/32)]$

$= 2\,[40+5+(1/32)] = 80+10+(1/16) \quad = 90\frac{1}{16}$

 تمارين (4-8) 

1 جد مفكوك كل مما يأتي : a. $(a-b)^3$, b. $(1+x)^4$

2 أوجد الحد الثامن في مفكوك $(2x+\frac{1}{x})^{10}$

3 أوجد الحدالاوسط في مفكوك $(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^{10}$

4 أوجد الحدين الاوسطين $(3x^2+(2/3x))^5$

5 اذا كانت نسبة الحد الثامن الى الحد الثالث في مفكوك $(3x+2)^{10}$ تساوي $1/12$ جد قيمة (x)

6 أوجد الحد الخالي من x في مفكوك

$$\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{3x}\right)^9$$

7 في مفكوك $(x^2+(a/x))^5$ إذا كان معامل x يساوي 80. فإذا كان $x=1$ جد قيمة a.

8 فيما يأتي اربع اجابات واحدة منها صحيحة حدد الاجابة الصحيحة

a.

الحد الثالث في مفكوك $(x+2)^6$

1. $60x^3$ 2. $120x^4$ 3. $40x^4$ 4. $60x^4$

b.

اذا كان الحدان الاوسطان في مفكوك $(5x+4y)^7$ متساويان فأن

1. $x=(2/5)y$ 2. $x=(4/5)y$ 3. $x=5y/4$ 4. $x=y$

الفصل التاسع
Chapter 9

المصفوفات Matrices

- [1- 9] تعريف المصفوفة .
- [2- 9] تعريف .
- [3- 9] تعريف [تساوي مصفوفتين] .
- [4- 9] بعض المصفوفات الشهيرة .
- [5- 9] جمع المصفوفات وضربها بعدد حقيقي .
- [1-5- 9] تعريف [ضرب مصفوفة في عدد حقيقي] .
- [6- 9] نظير المصفوفة بالنسبة لعملية الجمع .
- [7- 9] النظير الضربي للمصفوفة .
- [8- 9] تعريف .
- [9- 9] تعريف .
- [10- 9] حل معادلات الدرجة الأولى في مجهولين باستخدام المصفوفات .
- [11- 9] محددات الرتبة الثانية باستخدامها في حل معادلات المجهولين .
- [1-11- 9] استخدام المحددات في حل ثلاث معادلات من الدرجة الأولى في ثلاث متغيرات .

المصطلح	الرمز أو العلاقة الرياضية
المصفوفة A	$A = [a_{ij}]$
محدد المصفوفة A	$\Delta A = \|a_{ij}\|$
النظير الجمعي للمصفوفة A	$-A$
النظير الضربي للمصفوفة A	A^{-1}
طريقة كرامر في حل معادلتين	$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \; y = \frac{\Delta y}{\Delta}$



الفصل العاشر
- المصفوفات Matrices
- المحددات Determinats

اولاً : المصفوفات Matrices

مقدمة :

التعريف العام للمصفوفة : المصفوفات جمع كلمة مصفوفة وهي مفهوم رياضي يؤدي دوراً هاماً في معظم فروع المعرفة ، وقد لوحظت المصفوفات لأول مرة واستعملت من قبل العالم كيلي (1821 - 1895) وتستعمل المصفوفات في الوقت الحاضر من قبل المختصين في علم الاقتصاد وعلم الاجتماع وعلم النفس . هذا فضلاً عن الدور الكبير الذي تلعبه في الرياضيات وخاصة فيما يسمى بالجبر الخطي ولها تطبيقات اخرى لاغنى عنها في الفيزياء والكيمياء وسائرالعلوم التطبيقية .

لنفرض أن اربعة طلاب A, B, C, D كانت درجاتهم في إختبار مادة الرياضيات هي على الترتيب60، 73، 82، 94 وفي الفيزياء 87 ، 68، 84 ، 75 على الترتيب .

فيمكن تنظيم هذه المعلومات في جدول مستطيل يتكون من صفين وأربعة أعمدة كالآتي :

	D	C	B	A
الرياضيات	60	73	82	94
الفيزياء	87	68	84	75

إن الصف الاول في هذا المستطيل يعبر عن درجات الطلاب في الرياضيات والصف الثاني يعبر عن درجات الطلاب في الفيزياء كما أن العمود الاول يعبر عن درجات الطالب في المادتين معاً والعمود الثاني يعبر عن درجات الطالب في المادتين معاً وهكذا الطالبين .

ويمكن كتابة الجدول السابق على الصورة :

$$\begin{pmatrix} 94 & 82 & 73 & 60 \\ 75 & 84 & 68 & 87 \end{pmatrix} \quad \text{او} \quad \begin{bmatrix} 94 & 82 & 73 & 60 \\ 75 & 84 & 68 & 87 \end{bmatrix}$$

شكل (2- 9) شكل (1- 9)

وسنختار في هذا الكتاب الشكل (1)

∴ مثل هذا الجدول (الترتيب) اي الشكل رقم (1− 9) يسمى مصفوفة (Matrix).

نأخذ المثال التالي : جدول الضرب:

1	2	3	4	5	6
2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18
4	8	12	16	20	24

إن هذا الجدول له اربعة صفوف وستة اعمدة وكل عنصر (عدد) في هذا الجدول يتحدد (يتعين) موقعه بالصف والعمود . فمثلاً (15) يقع في الصف الثالث والعمود الخامس ، بينما (16) يقع في الصف الرابع والعمود الرابع .

تعريف (1 − 9) :

المصفوفة عبارة عن تنظيم عددي مؤلف من $m\times n$ عنصراً (Element) مرتبة في جدول مستطيل مكون من m صفاً ، n عموداً ، $m, n \in N^+$

تعريف(2− 9) :

نقول عن المصفوفة انها من النوع mxn وتقرأ m في n اذا كانت تحتوي صفوفاً (Rows) عددها m وأعمدة Columns عددها n كما نقول أحياناً واختصاراً إنها مصفوفة $m\times n$ ، $m, n \in N^+$

سنرمز للمصفوفة بحرف مثل : .... A, B, C

خشية الالتباس بين المصفوفة وعناصرها كما يجب الانتباه أن عناصر أي مصفوفة في هذا الكتاب تنتمي الى حقل الاعداد الحقيقية R .



إن كلاً من التنظيمات العددية الاتية هي عبارة عن مصفوفات :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

لاحظ المصفوفة A هي عبارة عن ستة عناصر مرتبة في صفين وثلاثة اعمدة، ان عناصر الصف الاول هي 3، 2، 1 وعناصر الصف الثاني هي 7, 0, 1− وعناصر العمود الثالث هي 7, 3 .

وحسب تعريف (1− 9) نقول أن A مصفوفة من النوع 3×2 حيث $m = 2$, $n = 3$ وإن B مصفوفة من النوع 2×3 حيث $m=3$, $n=2$

وان C مصفوفة من النوع 2×2 حيث $m=2$, $n=2$

اما E مصفوفة من النوع 4×3

وبصفة عامة اذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times n$ فاننا نكتب A على الصورة :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} i = 1,2,\ldots\ldots m \\ j = 1,2,\ldots\ldots n \end{matrix}$$

إن a_{ij} يمثل عنصراً إختيارياً (عاماً) في A حيث يرمز i الى ترتيب الصف الذي يقع فيه العنصر بينما يرمز j الى ترتيب العمود الذي يقع فيه هذا العنصر وبذلك بتعيين العنصر a_{ij} تماماً بمعرفة قيمتي j و i معاً .

مثال 2

اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ عين قيم جميع العناصر a_{ij}

الحل:

بما ان المصفوفة من النوع 2x3 فان :

$i = 1 , 2$ بينما $j = 1 , 2 , 3$ وبالتالي فان a_{ij} له ست قيم هي :

a_{11} (يمثل العنصر في الصف الاول والعمود الاول) = 1

a_{12} (يمثل العنصر في الصف الاول والعمود الثاني) = 1−

وبالمثال $a_{13}=2$, $a_{21}= -4$, $a_{22}=1$, $a_{23}=5$

تساوي مصفوفتين :

تعريف (3- 9) :

نقول ان المصفوفتين B, A متساويتان ونكتب A=B اذا تحقق الشرطان الاتيان معاً :

1. A, B من نوع واحد اي ان عدد صفوف A يساوي عدد صفوف B وعدد اعمدة A يساوي عدد اعمدة B .
2. $a_{ij} = b_{ij}$ لجميع قيم j و i الممكنة حيث j و i عددان طبيعيان موجبان



مثال 3

عين جميع عناصر المصفوفة $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ اذا علمت ان

$$A = B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

الحل :

من تعريف تساوي مصفوفتين نجد ان :

$a_{11}=2$, $a_{12}=-1$, $a_{13}=6$, $a_{21}=-3$, $a_{22}=0$, $a_{23}=-4$

[4 - 9] بعض المصفوفات الشهيرة :

أ. المصفوفة المستطيلة Rectangular Matrix : هي مصفوفة من نوع mxn حيث $m \neq n$
وعندما $m=1$ تسمى (مصفوفة الصف Row Matrix) من النوع $1\times n$
وعندما $n= 1$ تسمى (مصفوفة العمود Column Matrix) من النوع $m \times 1$

ب. المصفوفة المربعة(Square Matrix) : وهي مصفوفة من النوع $n \times n$ اي ان عدد صفوفها = عدد اعمدتها.

جـ. المصفوفة القطرية (Diagonal Matrix) : وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ما عدا العناصر الواقعة على القطر الاساس فيكون احدها على الاقل مغايراً للصفر .

د. مصفوفة الوحدة (Unit Matrix) : وهي مصفوفة قطرية يكون فيها كل من العناصر الواقعة على القطر الاساس مساوياً الواحد .

هـ. المصفوفة الصفرية (Zero Matrix) : وهي مصفوفة $m \times n$ وجميع عناصرها اصفار وسنرمز لها بالرمز(0)

مثال 4

أ. المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ مستطيلة فيها $n=3$ ، $m=2$

ب. المصفوفة $\begin{bmatrix} 12 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ مصفوفة صف فيها $n=3$ ، $m=1$

جـ. المصفوفة $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ مصفوفة عمود فيها $n=1$ ، $m=3$

د. المصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة 3x3 قطرها الاساس 6، 2، 3

وقطرها الثانوي الآخر 1 ، 2 ، 5

هـ. المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ مصفوفة قطرية 3x3 عناصر قطرها 2، 1-، 1

و. كل من المصفوفات : $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة وحدة

ز. كل من المصفوفات : $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

هي مصفوفة صفرية لاحظ أن كل واحدة تختلف عن الاخرى فمثلاً :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}_{1x2} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{2x1}$$

لان الاولى من النوع 2x1 بينما الثانية من النوع 1x2

[5 - 9] جمع المصفوفات وضربها في عدد حقيقي:

تعريف :(4 - 9)

اذا كانت $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ مصفوفتين كل منها $m \times n$

فان مجموعهما هو المصفوفة

$C = [c_{ij}]$ حيث $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

ان هذا التعريف يعني أننا نستطيع جمع أي مصفوفتين B, A إذا وفقط إذا كانتا من النوع $m \times n$ نفسه وحينئذ يمكننا ان نكتب مجموعها بالصورة :

$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ أي اننا نحصل على مصفوفة جديدة من النوع نفسه كل عنصر فيها يمثل مجموع العنصرين المتناظرين بالوضع في A, B

مثال 5

اذا كانت

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

فأوجد : A+A , B+A , A+B

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B+A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A+B = B+A$$

$$A+A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 10 & -12 & 2 \end{bmatrix}$$

لاحظ ان 2A تمثل ضرب كل من عنصر في A بالعدد (2) .

تعريف : (5-9)

اذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة $m \times n$ وكانت $K \in R$ فان حاصل ضرب المصفوفة A بالعدد الحقيقي k هو المصفوفة $C = [c_{ij}]$ حيث $c_{ij} = Ka_{ij}$ لجميع قيم ij الممكنة

اي ان : $KA= [ka_{ij}]$

مثال 6

اذا كانت $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ فجد المصفوفة k.A عندما تكون :

أ. $k=2$ ب. $k = \frac{1}{2}$ جـ. $K = -1$

الحل :

أ. $kA = 2A = 2 \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 4 & 8 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

ب. $k.A = \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

جـ $kA = (-1)A = (-1)\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

[6- 9] نظير المصفوفة بالنسبة لعملية الجمع :

تعريف : (6- 9)

اذا كانت A,B مصفوفتين من النوع $m \times n$ فان :

$$A - B = A + (-1)B$$

مثال 7

اذا كانت : $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

فجد كلاً من $B-A$, $A-B$ وتحقق أنهما غير متساويتين :

الحل :

$$A-B = A+(-1)B$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -6 & 1 & 0 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -6 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -6 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B - A = B + (-1)A$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 3 & -5 \\ 6 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -2 \\ 6 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore A - B \neq B - A$

خواص جمع المصفوفات :

اذا كانت H مجموعة المصفوفات من النوع $n \times m$ فان النظام $(H , +)$ حيث $(+)$ عملية جمع المصفوفات يتمتع بالخواص الاتية :

1. العملية $(+)$ ثنائية على H : لانه $\forall A , B \in H$
فان $A + B \in H$

....

2. العملية $(+)$ إبدالية : $\forall A , B \in H$
فان $A + B = B + A$

....

3. العملية $(+)$ تجميعية : $\forall A , B , C \in H$
فان $(A+B) + C = A + (B + C)$

....

4. يوجد في H عنصر محايد هو المصفوفة الصفرية (0) لانه
$\forall A \in H$
فان : $0 + A = A + 0 = A$

....

5. لكل مصفوفة A تنتمي الى H يوجد مصفوفة $B = (-1) A \in H$
بحيث $A + B = 0$

....

ملاحظة: إن تحقيق الخواص السابقة يمكن إيجازها في قولنا [أن النظام $(H,+)$ زمرة ابدالية]

خواص ضرب عدد حقيقي بمصفوفة :

اذا كانت B , A مصفوفتين من النوع $m \times n$ وكان $K, L \in R$ فان :

1. $K(A + B) = K . A + K . B$
2. $(K+L) . A = K. A + L . A$
3. $K . (L . A) = (K.L) A$
4. $IF \quad K . A = 0 \Leftrightarrow K = 0 \quad OR \quad A = 0$
5. $IF \; K . A = K . B$ حيث $K \neq 0 \Rightarrow A = B$
6. $1 . A = A$



اذا كانت $A , B , C \in H$

حيث H مجموعة المصفوفات من النوع $n \times m$ فجد C التي هي حل المعادلة

$$C + B = A$$

الحل :

باضافة المصفوفة $B -$ الى الطرفين :

$$C + B + (-B) = A + (-B)$$

خاصية التجميع في المصفوفات $C + (B - B) = A - B$

خاصية العنصرين المتناظرين $\Rightarrow C + 0 = A - B$

خاصية العنصر المحايد . $\Rightarrow C = A - B$

ملاحظة :

إن $B-$ هي النظير الجمعي للمصفوفة B وهو نظير وحيد والعنصر المحايد 0 وحيد وبالتالي يكون $C = A - B$ حلاً وحيداً للمعادلة .



مثال 9

اذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

فجد حل المعادلة $A = B + C$ وتحقق من صحة الناتج .

الحل :

$$C = A - B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

التحقيق : نحقق قيمة C في المعادلة :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = A$$

مثال 10

حل المعادلة المصفوفية الاتية :

$$-3\left(C - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = (-4)\ C + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(-3)\ C + (-3)(-1) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = (-4)\ C + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(-3)\ C + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = (-4)\ C + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$4C + (-3)\,C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$




تمارين (1- 9)

1. جد قيم h , z , y , x اذا كان :

أ. $\begin{bmatrix} x-2 & 2y+1 \\ x+3 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ z & 3h-2 \end{bmatrix}$

ب. $\begin{bmatrix} 3x & 10 \\ 2x+z & 2y-h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 2y \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$

2. اجر العمليات الاتية ان امكن ، مع ذكر السبب في حالة تعذر اجراء العملية :

أ. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

ب. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$

جـ. $\begin{bmatrix} 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

د. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$

3. اذا كانت $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ فجد المصفوفة $k.A$ عندما تكون :

أ. $k = 1$ ، ب. $k = \frac{2}{5}$ ، جـ. $k=0$ ، د. $k=-1$ ، هـ. $k=2$

4. اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 0 & -5 \end{bmatrix}$ فعبر عن كل مما يأتي كمصفوفة

أ. $A + (B+C)$ ب. $2A + B + C$

5. باستعمال المصفوفات A , B , C الواردة في التمرين (4) حل كلاً من المعادلات المصفوفية الاتية :

أ. $A + X = B + C$

ب. $2(B - C) = 2(X - C) - B$

جـ. $\frac{1}{2}(A + X) = 3X + 2B$

ضرب المصفوفات Multiplication Of Matrices :

سنوضح ضرب المصفوفات من خلال الامثلة الآتية:

اذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

فان حاصل ضرب $A \times B$ يعرف كما يلي :

1. $$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 4 + 3(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 8 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix}$$

2. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

فان $A \times B$ يعرف كما يلي

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 3 \times 4 & 1 \times (-1) + 3 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -1 \end{bmatrix}$$

3. $$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

فان $A \times B$ يعرف كما يلي:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 \times (-1) + (-1) \times 0 + 3 \times 1 \\ 2 \times (-1) + 0 \times 0 + 1 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4. $$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

فان $B \times A$ يعرف كما يلي:

$$A\times B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 1+0\times 5+1(-1) & 2\times 3+0\times 1+1\times 0 \\ 1\times 1+(-1)\times 5+3(-1) & 1\times 3+(-1)\times 1+3\times 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

ملاحظة :

شروط ضرب $A\times B$ هي:

أ. أعمدة A = صفوف B

ب. اذا كانت A من النوع $m\times L$ ، وكانت B من النوع $L\times n$ فان حاصل الضرب $A\times B$ تكون مصفوفة من النوع $m\times n$

جـ. اذا كانت A,B مصفوفتين مربعتين $m\times m$ فان كلا من AB , BA مصفوفة مربعة $m\times m$ وبصفة خاصة اذا كانت $A=B$ فسنكتب AA بالصورة A^2 اي ان $A^2 = AA$

مثال 1

اذا كانت $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

فجد ان امكن :

أ. $A\times B$ ب. $B\times A$ جـ. A^2 د. B^2

الحل : بما ان عدد اعمدة A= عدد صفوف B فان $A\times B$ يمكن ايجادها :

أ. $$A\times B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 \\ 14 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$


لا يمكن ايجاد $B \times A$ لان اعمدة B ≠ صفوف A



$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -21 \\ 28 & 13 \end{bmatrix}$$

د. لا يمكن ايجادها لان اعمدة B ≠ صفوف B حيث $B^2 = B \times B$



اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

فاثبت ان عملية ضرب المصفوفة غير ابدالية .

الحل :

$$A \times B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 25 \\ 12 & 20 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 9 & 35 \end{bmatrix}$$

من الواضح ان $A \times B \neq B \times A$

مثال 3

اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فاثبت ان $A \times I = I \times A$ وماذا تستنتج من ذلك ؟

الحل :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A$$

كذلك $I \times A = A$

∴ نستنتج ان $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

مصفوفة محايدة بالنسبة لعملية ضرب المصفوفة المربعة من النوع 2x2



اذا علمت ان

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

فجد كلاً من z , y , x

الحل :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 0 \times (-2) + (-1) \times 3 \\ 0 \times 1 + (-2)(-2) + 3 \times 3 \\ 2 \times 1 + 1 \times (-2) + 0 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 13 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = -2 \quad , \quad y = 13 \quad , \quad z = 0$$



اذا علمت ان A مصفوفة من النوع 2×3 ، B مصفوفة من النوع 3x2 فجد نوع كل من المصفوفات الاتية :

أ. $A \times B$ ب. $B \times A$ جـ. $(A \times B) \times A$ د. $(B \times A) \times B$

الحل :

أ. A مصفوفة 2x3 ، B مصفوفة 3x2 ⇐ $A \times B$ مصفوفة 2x2

ب. B مصفوفة 3x2 ، A مصفوفة 2x3 ⇐ $B \times A$ مصفوفة 3x3

جـ. $(A \times B)$ مصفوفة 2x2 ، A مصفوفة 2x3 ⇐ $(B \times A) \times A$ مصفوفة 2x3

د. $(B \times A)$ مصفوفة 3x3 ، B مصفوفة 3x2 ⇐ $(B \times A) \times B$ مصفوفة 3x2

مثال : 6

اذا كانت

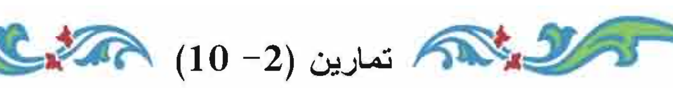
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ فاثبت ان $A^2 - 3A + 2I = 0$

الحل :

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

∴ الطرف الاول = $A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 = \text{الطرف الثاني}$$



تمارين (2− 10)

1. اذا كانت :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

فجد

أ. $A \times B$ ب. $A \times C$ جـ. $B \times C$ د. $B \times A$ هـ. $C \times A$

و. $C \times B$ ز. $(A \times B) \times C$ ح. $A \times (B \times C)$

2. اذا كانت A, B, C كما في التمرين السابق وكانت I مصفوفة الوحدة فاثبت ان :

أ. $A \times B = -(B \times A)$ ب. $A^2 = C^2 = I$ جـ. $B^2 = -I$

د. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

3. اذا كانت A مصفوفة 2×3 و B مصفوفة 3×3 و C مصفوفة 3×4

و D مصفوفة 2×3 . فبين نوع كل من المصفوفات الأتية :

أ. $A \times B$ ب. $D \times A$ جـ. $A \times D$ د. $C \times B$ هـ. $B \times D$

و. $D \times (A \times B)$ ز. $(C \times B) \times D$ ح. $(A \times D) \times A$

4. اجرِ عملية الضرب فيما يأتي ، أن امكن واذكر السبب في حالة تعذر اجراء عملية الضرب:

أ. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

ب. $\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

جـ. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

د. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

هـ. $\begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

و. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

ز. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

ح. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

5. اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

بين صحة أو خطأ كل من العبارات الاتية مع ذكر السبب :

أ. $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

ب. $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$

جـ. $A \times (B + A) = A \times B + A^2$

د. $A \times (B + C) = B \times A + C \times A$

هـ. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

6. اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

فاثبت ان :

أ) $A^2 - 2A - 3I = 0$

ب) $B^2 - B + I = 0$

جـ) $A \times B \neq B \times A$

7. اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

فاثبت ان : $A \times B = B \times A = I$ لاحظ ان $B \times A$ كل منهما النظير الضربي للآخر.

[7 - 9] النظير الضربي للمصفوفة : Inveres of a Matrix

سنتناول هنا دراسة النظير الضربي للمصفوفة المربعة من النوع 2×2 فقط.

تعريف :(7- 9)

النظير الضربي للمصفوفة A من النوع 2x2 إن وجدت مصفوفة B من النوع نفسه بحيث يكون : $A \times B = B \times A = I$

حيث I المصفوفة المحايدة بالنسبة لعملية الضرب (أي مصفوفة الوحدة من النوع 2x2)

سنرمز للنظير الضربي للمصفوفة A بالرمز A^{-1} (اي ان $B = A^{-1}$)

تعريف (8- 9) : محدد المصفوفة The Determinat Of Matrix

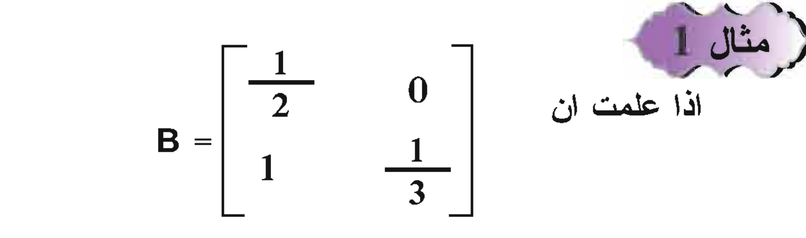
اذا كانت $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

فان المقدار $a.d - b.c$ يسمى محدد المصفوفة A ويرمز بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ او بالرمز $\triangle$ وتقرأ دلتا أي أن :

$$\triangle = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$$

تجدر الاشارة الى انه المقدار $a.d - b.c$ هو عبارة عن حاصل ضرب العنصرين الواقعين على القطر الاساس في المصفوفة A مطروحاً منه حاصل ضرب العنصرين الواقعين على القطر الآخر . كما أن الخطين | | لا يرمزان للقيم المطلقة .

مثال 1



اذا علمت ان $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

فاوجد

أ. محددA ب. محددB جـ. $A \times B$ د. $B \times A$

ماذا تستنتج من الفرعين جـ ، د .

الحل :

أ. محدد A : $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 0 \times (-6) = 6$

ب. محدد B: $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} - 0 \times 1 = \frac{1}{6}$

جـ. $A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

د. $B \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

نستنتج من الفرعين جـ , د أن كلاً من A , B نظير ضربي للأخرى أي أن :

حسب تعريف (7- 9) $B^{-1} = A$, $A^{-1} = B$

تعريف (9- 9) :

اذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فان النظير الضربي للمصفوفة A يكون موجوداً

(معروفاً) عندما تكون محددلا تساوي صفراً أي $(\Delta A \neq 0)$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{\Delta} & \frac{-b}{\Delta} \\ \frac{-c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{bmatrix}$$

ملاحظة :

اذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وللحصول على A^{-1} (ان كان موجوداً) فيجب

*اتباع الخطوات الاتية لايجاده ويكون امراً سهلاً :

قبل كل شيء نجد قيمة Δ (محدد A) فاذا كانت $\Delta = 0$ فان A ليس لها نظير ضربي واذا كانت $\Delta \neq 0$ فان للمصفوفة A نظيراً ضربياً يتعين كالاتي :

أ. تبادل بين وضعي العنصرين الواقعين على القطر الاساس للمصفوفة A .

ب. نغير كل من اشارتي العنصرين الواقعين على القطر الآخر للمصفوفة A.

جـ. نضرب المصفوفة الناتجة بعد اجراء عمليتي أ ، ب بالعدد $\frac{1}{\Delta}$ فنحصل على A^{-1}



اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$ حيث $xy \neq 0$

فاثبت ان لكل من A,B ، $B \times A$ نظير ضربي ثم أوجده ؟

الحل :

بالنسبة للمصفوفة A :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

∴ للمصفوفة نظير ضربي هو :

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

بالنسبة للمصفوفة B :

حسب نظرية الضرب $$\Delta = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{vmatrix} = xy \neq 0$$

للمصفوفة نظير ضربي هو :

$$B^{-1} = \frac{1}{xy}\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{bmatrix}$$

ان هذا يعني انه اذا كانت B مصفوفة قطرية عناصرها مغايرة للصفر فان نظيرها مصفوفة قطرية أيضاً عناصر قطرها هي مقلوب عناصر القطر في B .

بالنسبة للمصفوفة $A \times B$:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x & 0 \\ 0 & 4y \end{bmatrix}$$

ولما كانت $A \times B$ مصفوفة قطرية قطرها مغايراً للصفر فان :

$$(A \times B)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3X} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4y} \end{bmatrix}$$

تحقق بنفسك ان :

$$(A \times B)^{-1} (A \times B) = (A \times B) (A \times B)^{-1} = I$$



أي من المصفوفات الاتية لها نظير ضربي ثم أوجده :

أ. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ جـ. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 12 & 20 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

الحل:.أ. لهذه المصفوفة نظير ضربي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

أ. ∴ لهذه المصفوفة نظير ضربي هو :

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-3}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$



$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -5 \times 3 - 5 \times (-3) = 0$$

∴ ليس لهذه المصفوفة نظير ضربي .

جـ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - (-1) \times 1 = 2 \neq 0$$

∴ لهذه المصفوفة نظير ضربي هو :

$$c^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & +1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

د

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & 20 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 12 \times 5 - 20 \times 3 = 0$$

∴ ليس لهذه المصفوفة نظير ضربي .

مثال 4

إحسب قيم x التي تجعل المصفوفة الاتية ليس لها نظير ضربي $\begin{bmatrix} x & 3 \\ 12 & x \end{bmatrix}$

الحل:

المصفوفة $\begin{bmatrix} x & 3 \\ 12 & x \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي عندما تكون محددتها صفراً أي :

$$\begin{vmatrix} x & 3 \\ 12 & x \end{vmatrix} = x^2 - 3 \times 12 = 0$$

$$x^2 - 36 = 0$$

$$\Rightarrow x = 6 \ , \ x = -6$$

[10- 9]حل معادلات الدرجة الاولى في مجهولين باستخدام المصفوفات :

اذا أعطينا نظام المعادلتين :

$$ax + by = L$$
$$cx + dy = k$$

يمكن كتابتها بالصيغة المصفوفية :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ k \end{bmatrix}$$

فاذا فرضنا أن $C = \begin{bmatrix} L \\ k \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$A \times B = C \text{ .... } (1)$$

تسمى A مصفوفة المعاملات،B مصفوفة المجاهيل ، C مصفوفة الثوابت واذا كانت المحدد

$A \neq 0$ أي $\triangle = ad - bc \neq 0$ فمن الممكن ايجاد حل (1) كما يلي :

بضرب طرفي (1) في A^{-1}	$A^{-1}(A \times B) = A^{-1} \times C$
خاصية التجميع	$(A^{-1} \times A) \times B = A^{-1} \times C$
من تعريف النظير A	$I \times B = A^{-1} \times C$
لان I عنصر محايد	$B = A^{-1} \times C$

من الواضح ان بمقدورنا الان إيجاد المجهولين x , y (اللذين يشكلان حل نظام المعادلتين الاصليتين) بدلالة الثوابت العددية a , b , c , d , L, k .



حل نظام المعادلتين الاتيتين باستخدام المصفوفات ثم حقق النتائج:

$$2x + 5y = 1 \;\ldots\ldots\; (1)$$
$$3x + 7y = 2 \;\ldots\ldots\; (2)$$

الحل :

نكتب المعادلة المصفوفية

$AX = C$ حيث : $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

A محدد $= \Delta = 2 \times 7 - 5 \times 3 = -1 \neq 0$

$\therefore$ A لها نظير ويكون الحل $B = A^{-1} \times C$

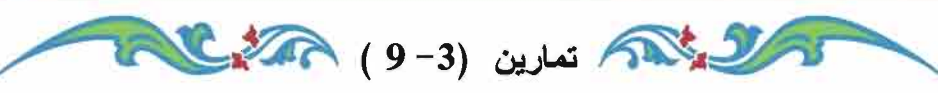
$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x = 3 \quad , \quad y = -1$$

التحقيق : بالتعويض المباشر في (2) ، (1) بقيمتي y , x نجد ان :

$$2 \times 3 + 5(-1) = 1$$
$$3 \times 3 + 7(-1) = 2$$



تمارين (3 - 9)

1. جد النظير الضربي لكل من المصفوفات الاتية كلما امكن ذلك :

أ. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ جـ. $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

هـ. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ و. $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ز. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ح. $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$

2. احسب قيم x التي تجعل كلاً من المصفوفات الاتية ليس لها نظير ضربي :

أ. $\begin{bmatrix} x & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 9 & x \\ 4 & x \end{bmatrix}$ جـ. $\begin{bmatrix} x & 4 \\ 2 & x^{-2} \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} x^{2} & 2 \\ 1 & x^{-2} \end{bmatrix}$

3. اذا كانت $X = \begin{bmatrix} 3 & -12 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ فاثبت ان $X^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

4. اذا كانت $Y = \begin{bmatrix} a & -ab \\ 0 & b \end{bmatrix}$ فاثبت ان $Y^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 1 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$ حيث $ab \neq 0$

5. اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ فاثبت ان $A^{-1} = A$

6. اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$ فاجب عما يلي :

أ. احسب كلاً من $B^{-1} \quad , \quad A^{-1}$

ب. جد ناتج $B^{-1} \times A^{-1} \quad , \quad A^{-1} \times B^{-1}$

جـ. جد ناتجهما $(A \times B)^{-1} \quad , \quad A \times B$

د. تحقق من أن $(A^{-1})^{-1} = A$

7. حل نظام المعادلتين الاتيتين باستخدام المصفوفات ثم حقق النتائج :

$$3x - 4y = -5$$

$$3y - 5x = 1$$

ثانيا : المحددات

[11− 9] محددات الرتبة الثانية واستخداماتها في حل معادلات المجهولين

اذا اعطينا نظام المعادلتين الاتيتين في مجهولين x, y :

$$ax + by = L \;\ldots\ldots\; (1)$$

$$cx + dy = k \;\ldots\ldots\; (2)$$

فان الاعداد a, b, c, d تسمى المعاملات ، أما العددان L, k فيسميان الثوابت تكون :

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ محدد المعاملات ويرمز لها بالرمز Δ نلاحظ ان معاملات المجهول x

تكون العمود الاول للمحدد Δ، نسمي $\begin{vmatrix} L & b \\ k & d \end{vmatrix}$ محدد المجهول x ونرمز لها بالرمز Δx

ونحصل عليها من Δ وذلك بعد الاستعاضة عن العمود الاول (معاملاتx) بالثوابت L , k

كما نسمي $\begin{vmatrix} a & L \\ c & k \end{vmatrix}$ محدد المجهول y ونر مز له الرمز y Δ وذلك بعد الاستعاضة عن العمود الثاني (معاملات y) بالثوابت L , K والان بفرض ان $\Delta \neq 0$ فان قيمتي المجهولين x , y تحددان بالعلاقتين :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} L & b \\ k & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{Ld - bk}{ad - bc}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a & L \\ c & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ak - cL}{ad - bc}$$



حل نظام المعادلتين الاثنتين باستخدام المحددات :

$$2x - 3y = -4 \quad , \quad 3x + y = 2$$

$$X = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-4 + 6}{2 + 9} = \frac{2}{11}$$

$$Y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4 + 12}{2 + 9} = \frac{16}{11}$$

مثال 2

حل نظام المعادلتين : $5X - 6Y = 0 \quad , \quad 3X + 4Y = 0$

$$X = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{0}{38} = 0$$

$$Y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{0}{38} = 0$$

مثال 3

حل نظام المعادلتين :

$$-3n = 4-3m........ (1)$$

$$6m + n + 4 = 0 ...... (2)$$

الحل :

نضع المعادلتين بالشكل :

$$3m - 3n = 4$$

$$6m + n = -4$$

$$m = \frac{\triangle m}{\triangle} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4 \times 1-(-3)(-4)}{3\times 1-(-3)\times 6} = \frac{4-12}{3+18} = \frac{-8}{21}$$

$$n = \frac{\triangle n}{\triangle} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3 \times (-4) - 4 \times 6}{3 \times 1-(-3)\times 6} = \frac{-12-24}{3+18}$$

$$= \frac{-36}{21} = \frac{-12}{7}$$

المحددات من الرتبة الثالثة :



اذا كانت

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$ فجد قيمة محدد A

الحل:

$$\text{محدد } A = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} -3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(0 \times 5 - 4 \times (-1)\,) - 3\,(1 \times 5 - 4 \times 0) + 0 = 8 - 15 = -7$$

او حل آخر (طريقة كريمر) :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}$$

$$=(2\times 0 \times 5+3\times4\times 0+0\times1\times (-1)) - (0+2 \times 4\times (-1)+3\times1\times5)$$

$$= 0- (-8+15) = -7$$

مثال 5

جد ناتج :

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=2(-2-0) +3\ (-1-0)\ +4\ (1-0) = -4\ -3\ +4 = -3$$

أو حل آخر بطريقة كريمر:

$$\left|\begin{matrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= (2\times2(-1)+(-3)\times0\times0+4\times1\times1)\ -(4\times2\times0+2\times0\times1+(-3)\times1\times(-1))$$
$$= (-4\ +4)\ -\ (3)$$
$$= -3$$

[1-11- 9] استخدام المحددات في حل ثلاث معادلات من الدرجة الاولى في ثلاث متغيرات

اذا كان لدينا نظام المعادلات الاتي في ثلاث مجاهيل x, y, z

$$ax+ by + cz = d$$
$$a_1x + b_1y + c_1z =d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z=d_2$$

محدد المعاملات :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

كذلك :

$$\Delta x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} ، \Delta y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \end{vmatrix} ، \Delta z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{\Delta X}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$



جد حل نظام المعادلات الاتي:

$$x + 3y - z = 1$$
$$2x + 2y + z = 0$$
$$3x + y + 2z = -1$$

الحل :

نجد محدد المعاملات Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 , \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad , \Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{0}{4} = 0$$



جد قيم k التي تجعل لنظام المعادلات الاتية حلاً :

$$x+ky=0$$

$$2x-y=0$$

الحل:

يكون لهذا النظام حل عندما تكون محدد معاملاته لا تساوي صفراً عندما

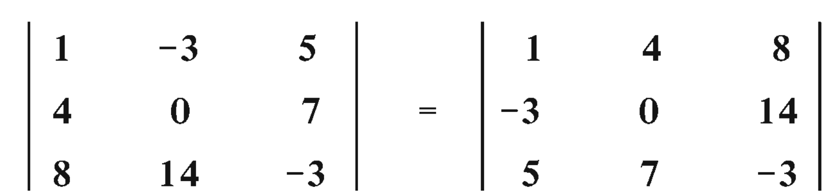
$$\begin{vmatrix} 1 & k \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow -1-2k \neq 0 \Rightarrow k \neq -\frac{1}{2}$$

$$\therefore k \in R \setminus \{-\frac{1}{2}\}$$

خواص المحددات :

1. في اي محدد اذا بدلت الصفوف بالاعمدة والاعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها فان قيمة المحدد لا تتغير.





$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \\ 8 & 14 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -3 & 0 & 14 \\ 5 & 7 & -3 \end{vmatrix}$$

2. قيمة المحدد لا تتغير عند ايجاد قيمته عن طريق عناصر احد صفوف أو أحد أعمدته :



لايجاد قيمة المحدد :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} -3\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} -1\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 54$$

قيمة المحدد (عناصر أحد الصفوف). او

$$=2\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} +5\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 54$$

قيمة المحدد (عناصر أحد الاعمدة) .

3. اذا كانت جميع عناصر اي صف اوعمود في محدد كلها اصفار فان قيمة المحدد تساوي صفراً .



$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \text{ ، } \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

4. في اي محدد اذا بدلنا موضعي صفين متتالين او عمودين متتاليين فان قيمة المحدد الناتج تساوي قيمة المحدد الاصلي مضروباً في (-1)



$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \\ -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix}$$

5. اذا تساوت العناصر المناظرة في اي صفين (أو عمودين) في محدد فان قيمة المحدد تساوي صفراً .



$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

لان عناصر الصف الاول = عناصر الصف الثالث

6. اذا وجد عامل مشترك في جميع عناصر اي صف (أو أي عمود) في محدد فان هذا العامل يمكن اخذه خارج المحدد.



$$2\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 7 & 8 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 10 & 2 \\ 6 & 7 & 8 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 12 & 7 & 8 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

7. لاتتغير قيمة المحدد اذا أضيفت عناصر اي صف أو (عمود) مضروبة بعدد (k) الى العناصر المقابلة لها في صف او عمود آخر .

مثلاً

بدون فك المحدد أثبت ان :

$$\begin{vmatrix} a+b & c+1 & 1 \\ b+c & a+1 & 1 \\ a+c & b+1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

الحل

نضيف العمود الاول الى الثاني فنحصل على

$$\begin{vmatrix} a+b & a+b+c+1 & 1 \\ b+c & a+b+c+1 & 1 \\ a+c & a+b+c+1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

وبما ان عناصر العمودين الثاني والثالث متساوية فناتج المحدد = 0



أثبت أن قيمة المحدد = صفر دون استخدام طريقة المحددات .

الحل :

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & -2 \\ -1 & -3 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

أخراج عامل مشترك (3) من عناصر العمود الثاني خاصية (6) .

حسب الخاصية (5) $= 3 \times 0 = 0$

مثال 2

أثبت ان : (باستخدام خواص المحددات)

$$\begin{vmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 42 & -15 & 6 \\ 21 & 2 & 12 \end{vmatrix} = -42 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\begin{vmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 42 & -15 & 6 \\ 21 & 2 & 12 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 6 & -15 & 6 \\ 3 & 2 & 12 \end{vmatrix}$$

خاصية (6) .

(7) عامل مشترك من عناصر العمود الاول .

$$= 7 \times 2 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 6 & -15 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

خاصية (6) .

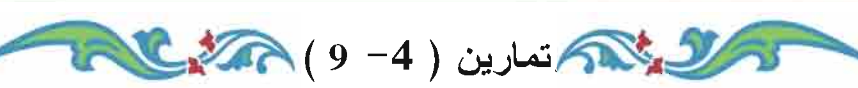
(2) عامل مشترك من عناصر العمود الثالث

$$= 7 \times 2 \times (-3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

خاصية (6) .

(−3) عامل مشترك من عناصر الصف الثاني ...

$$= -42 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$



تمارين (4 - 9)

1. احسب قيمة المحددات الآتية :

أ. $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$ ب. $\begin{vmatrix} -7 & 13 \\ 13 & -7 \end{vmatrix}$ جـ. $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$

د. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ هـ. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & 8 \end{vmatrix}$ و. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix}$

2. جد حل كل من انظمة المعادلات الآتية باستخدام المحددات :

a. $x + 2y = 0$
$2x - 3y = 1$

b. $-3x - 5y = -1$
$x + 6y = 3$

c. $2x = 3y + 4$
$5y = -4x - 1$

d. $6L - 7k = 0$
$4L + 3k = 0$

ثم استخدم المصفوفات لحل انظمة المعادلات المذكورة في سؤال (2) .

3. جد قيمة m التي تجعل لنظام المعادلات الاتية حلاً :

$x + 2y = 1$
$3x + my = 4$

4. استخدم المحددات لحل انظمة المعادلات الاتية :

a. $x + y + z = 1$
$2x - y - z = -1$
$3x + 2y = 2$

b. $-x + 3y + z = 0$
$3x - 2y - z = 1$
$x + y + 2z = 0$

c. $3x = 2y + 3 + z$
$2x - y + 4 = z$
$y + z = -x + 3$

d. $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y + \frac{3}{4}z = 1$
$3x + y - z = -2$
$6x - y + 2z = 0$

5. جد قيم m التي تجعل لنظام المعادلات الاتية حلاً :

$$x - y + z = 0$$
$$x + y + mz = 0$$
$$-x - y + z = 1$$

6. اثبت ان المبادلة بين صفي محدد من الدرجة الثانية يغير من اشارتها فقط اي انه

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

7. حل المعادلة الاتية واوجد قيمة (x) .

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 8 & 1-x & -x \\ x & -1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$$

8. باستخدام خواص المحددات جد قيمة ناتج المحدد:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -3 \\ -7 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

9. اثبت باستخدام خواص المحددات :

$$\begin{vmatrix} 15 & 6 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$